1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 13 décembre 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………….………..

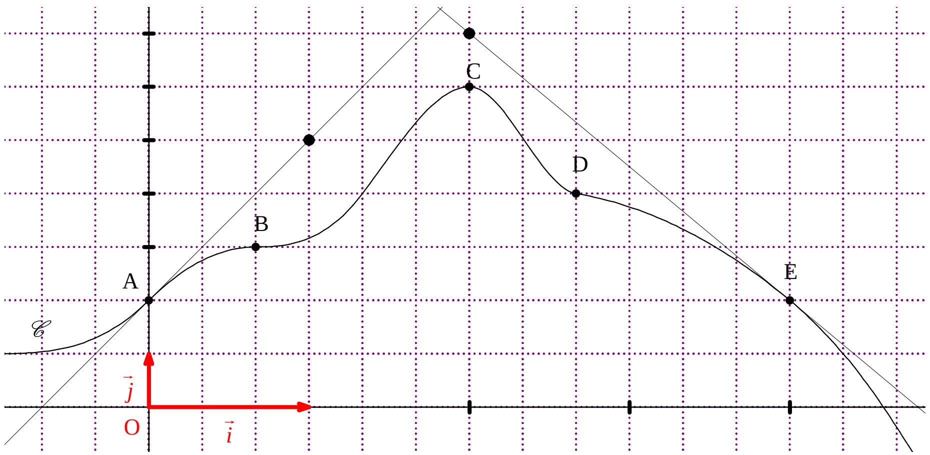
Note : ….. / 20

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère une fonction f dérivable sur son domaine de définition dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous.

On précise que la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $\text{A}(0\,;2)$, $\text{B}\left(\dfrac{2}{3}\,;3\right)$, $\text{C}(2\,;6)$, $\text{D}\left(\dfrac{8}{3}\,;4\right)$, $\text{E}(4\,;2)$.

Les tangentes en A et E sont tracées sur le graphique. On a marqué sur chacune d'elles un point à coordonnées entières.



1°) Compléter les égalités : $f'(0) =$ .... ; $f'(4) =$ ....

2°) On sait que $f'\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$, $f'(2) = 0$ et $f'\left(\dfrac{8}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Tracer en vert sur le graphique les tangentes en B, C, D à $\mathscr{C}$.

3°) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point E.

………………………………………………… (une seule égalité)

II. (4 points : 1°) 1 point + 1 point + 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Soit h un réel quelconque différent de 0 et de – 1.

Exprimer $f(1+h) - f(1)$ puis $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ en fonction de h sous forme simplifiée.

On veillera à présenter le mieux possible les calculs. On attend en particulier que les traits de fraction soient faits à la règle et bien positionnés par rapport au signe $=$.

…...

…...

…...

…...

…...

…...

…...

…...

Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers …… .

En déduire que f est dérivable en 1 et donner le nombre dérivé de f en 1. On répondra par une phrase.

…...

…...

…...

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

2°) Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1. On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
Recopier et compléter la phrase suivante permettant de définir T :

« T est la droite passant par … et de coefficient directeur … . »

…...

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

2°) Le but de la question est de déterminer l' (ou les) abscisse(s) du (des) point(s) de $\mathscr{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur – 2.
Compléter la phrase suivante :

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2 sont les solutions de l'équation

………………………… (1).

(1) est successivement équivalente à (trois lignes de résolution suffisent !) :

…..………

…..………

…..………

Les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2 ont pour abscisses ………………………… .

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x$ définie sur $\mathbb{R}$.

On choisit un nombre de départ, par exemple 3, qui va nous permettre de construire une suite de nombres en utilisant la fonction *f*.
On calcule l'image de ce nombre par *f*. On obtient $1 - 2 \times 3 = -5$.
On recommence avec – 5. On calcule l'image de – 5 par *f*. On obtient 11.
On obtient ainsi une suite infinie de nombres : 3 ; – 5 ; 11 … dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction *f*.

1°) On choisit $-\frac{3}{2}$ pour nombre de départ. Écrire les 3 nombres suivants obtenus par le procédé.

2°) On choisit $\frac{1}{9}$ pour nombre de départ. Utiliser la commande « rép » de la calculatrice pour donner la valeur exacte du dixième nombre de la suite ($\frac{1}{9}$ est donc le premier nombre de la suite).

1°) ……………………………………………………………………… 2°) ……………

V. (3 points)

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $\mathrm{AB} = 4$ cm. On note M un point quelconque de la demi-droite $[\mathrm{AB})$ tel que $\widehat{\mathrm{ACM}} = x°$ où *x* est un réel quelconque tel que $0 \leqslant x < 90$. On note alors *y* la distance BM en centimètres.
Compléter l'algorithme ci-dessous en langage naturel qui, pour une valeur de *x* saisie en entrée, affiche en sortie la valeur de *y*. Il est demandé de ne pas utiliser d'autres variables que *x* et *y*.
Dans la partie traitement, on utilisera une instruction conditionnelle de la forme « Si $x \leqslant$ .... ».

Entrée :

Traitement :

Sortie :

VI. (2 points)

Calculer la somme $\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{(-1)^k}{k}$.

On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible. Écrire le calcul sur les lignes en dessous.

A = ... (un seul résultat)

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

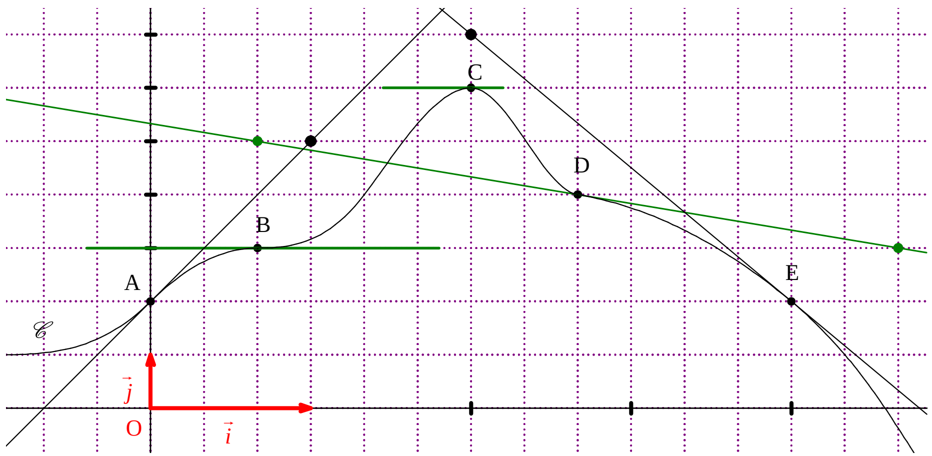
Corrigé du contrôle du 13-12-2016

I.

On considère une fonction f dérivable sur son domaine de définition dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous.

On précise que la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $\mathrm{A}(0\,;2)$, $\mathrm{B}\left(\frac{2}{3}\,;3\right)$, $\mathrm{C}(2\,;6)$, $\mathrm{D}\left(\frac{8}{3}\,;4\right)$, $\mathrm{E}(4\,;2)$.

Les tangentes en A et E sont tracées sur le graphique. On a marqué sur chacune d'elles un point à coordonnées entières.



1°) Compléter les égalités : $f'(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $f'(4) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

$f'(0) = 3$ $\qquad\qquad$ $f'(4) = -\frac{5}{2}$

Il faut faire attention aux vecteurs unités sur chaque axe.

● Le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A donc cette tangente a pour coefficient directeur 3. On a donc $f'(0) = 3$.

On peut aussi imaginer un chemin. On voit qu'un déplacement d'une unité horizontalement vers la droite correspond à trois unités verticalement vers le haut. D'où $\frac{\text{3 unités verticales}}{\text{1 unité horizontale}}$.

● Le vecteur $\vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point E donc cette tangente a pour coefficient directeur $-\frac{5}{2}$. On a donc $f'(4) = -\frac{5}{2}$.

2°) On sait que $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, $f'(2) = 0$ et $f'\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Tracer en vert sur le graphique les tangentes en B, C, D à $\mathscr{C}$.

● On pouvait utiliser la représentation simplifiée des tangentes sous la forme de doubles flèches.

● Les tangentes aux points B et C à $\mathscr{C}$ sont horizontales. Ces deux tangentes étaient comptées sur un seul point.

3°) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point E.

$$y = 12 - \frac{5}{2}x \quad \text{(une seule égalité)}$$

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point E a pour équation $y = f'(4)(x-4) + f(4)$ soit $y = -\frac{5}{2}(x-4) + 2$ ce qui donne finalement $y = 12 - \frac{5}{2}x$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Soit h un réel quelconque différent de 0 et de – 1.

Exprimer $f(1+h) - f(1)$ puis $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ en fonction de h sous forme simplifiée.

On veillera à présenter le mieux possible les calculs. On attend en particulier que les traits de fraction soient faits à la règle et bien positionnés par rapport au signe $=$.

$$f(1+h) - f(1) = \frac{3}{(1+h)^2} - 3$$
$$= \frac{3 - 3(1+h)^2}{(1+h)^2}$$
$$= \frac{-6h - 3h^2}{(1+h)^2}$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{-6h-3h^2}{(1+h)^2}}{h}$$
$$= \frac{-6h - 3h^2}{h(1+h)^2}$$
$$= \frac{\cancel{h}(-6-3h)}{\cancel{h}(1+h)^2}$$
$$= \frac{-6-3h}{(1+h)^2}$$

Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers – 6.

En déduire que f est dérivable en 1 et donner le nombre dérivé de f en 1. On répondra par une phrase.

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers – 6.

Comme le résultat de cette limite est fini, f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est égal à – 6.

Cette phrase était comptée sur 0 point.

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

Avec la commande de nombre dérivé, on obtient : – 6,000012.
Le résultat est donc cohérent avec notre calcul. Les deux dernières décimales du résultat affiché sont fausses et sont dues au procédé de calcul approximatif de la calculatrice.

2°) Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1. On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
Recopier et compléter la phrase suivante permettant de définir T :

« T est la droite passant par … et de coefficient directeur … . »

T est la droite passant par A et de coefficient directeur – 6.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ (un seul résultat)

2°) Le but de la question est de déterminer l' (ou les) abscisse(s) du (des) point(s) de $\mathscr{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur – 2.
Compléter la phrase suivante :

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2 sont les solutions de l'équation $f'(x) = -2$ (1).

(1) est successivement équivalente à (trois lignes de résolution suffisent !) :

$$-\frac{1}{x^2} = -2$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2 ont pour abscisses $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1-2x$ définie sur $\mathbb{R}$.

On choisit un nombre de départ, par exemple 3, qui va nous permettre de construire une suite de nombres en utilisant la fonction f.

On calcule l'image de ce nombre par f. On obtient $1-2\times3=-5$.

On recommence avec – 5. On calcule l'image de – 5 par f. On obtient 11.

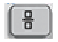
On obtient ainsi une suite infinie de nombres : 3 ; – 5 ; 11 … dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction f.

1°) On choisit $-\dfrac{3}{2}$ pour nombre de départ. Écrire les 3 nombres suivants obtenus par le procédé.

2°) On choisit $\dfrac{1}{9}$ pour nombre de départ. Utiliser la commande « rép » de la calculatrice pour donner la valeur exacte du dixième nombre de la suite.

1°) 4 ; – 7 ; 15 $\qquad$ 2°) $\dfrac{1027}{9}$

● Pour la calculatrice TI-83 Premium CE :

On tape 1/9 à l'écran en utilisant la touche  puis on appuie sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

On utilise ensuite les touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{(-)}}$ (rép) pour faire s'afficher à l'écran l'expression $1-2\text{Rep}$.

On appuie enfin 9 fois sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

On obtient l'affichage : $\dfrac{1027}{9}$.

● Pour la calculatrice TI-83 « normale » :

On tape 1/9 à l'écran puis on appuie sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

On utilise ensuite les touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{(-)}}$ (rép) pour faire s'afficher à l'écran l'expression $1-2\text{Rep}$.

On appuie enfin 9 fois sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

On obtient l'affichage : 114,1111111 .

Grâce à la commande Frac, on trouve la valeur exacte sous forme fractionnaire.

V.

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 4$ cm. On note M un point quelconque de la demi-droite $[AB)$ tel que $\widehat{ACM} = x°$ où x est un réel quelconque tel que $0 \leqslant x < 90$. On note alors y la distance BM en centimètres.
Compléter l'algorithme ci-dessous en langage naturel qui, pour une valeur de x saisie en entrée, affiche en sortie la valeur de y. Il est demandé de ne pas utiliser d'autres variables que x et y.
Dans la partie traitement, on utilisera une instruction conditionnelle de la forme « Si $x \leqslant$....... ».

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $x \leqslant 45$
  Alors y prend la valeur $4 - 4\tan x°$
  Sinon y prend la valeur $4\tan x° - 4$
FinSi

Sortie :
Afficher y

On commence par faire une figure permettant de visualiser la situation.

VI.

Calculer la somme $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=4} \frac{(-1)^k}{k}$.

On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible. Écrire le calcul sur les lignes en dessous.

$A = -\dfrac{7}{12}$ (un seul résultat)

$$A = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4}$$

$$= -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{12}{12} + \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$$

$$= -\frac{7}{12}$$