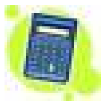
TS1

Contrôle du vendredi 9 décembre 2016 (50 minutes)



Prénom et nom : …………………………………………..…………….

Note : ……../ 20

I. (9 points : 1 point + 2 points par limite)

Question de cours (1 point accordé uniquement si la propriété est parfaitement citée)

Soit q un réel fixé.
Écrire dans le cadre ci-dessous la règle concernant le comportement asymptotique de la suite (q^n) lorsque n tend vers $+\infty$ suivant les valeurs de q. On répondra sous forme mathématique.

- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………………………

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général :

1°) $u_n=\dfrac{3^{n-1}\times 2^n}{4^{2n}}$; 2°) $u_n=\dfrac{3^n-2^n}{5^{n+1}}$; 3°) $u_n=4^n-\dfrac{3}{2^{-2n}}$; 4°) $u_n=\dfrac{4^{n+1}+4^n}{3^{n+1}+3^n}$.

Dans chaque cas, on justifiera que u_n peut s'écrire sous la forme $......\times(......)^n$ ou comme somme ou différence de telles expressions (les parenthèses ne seront pas forcément utiles dans tous les cas !).
On se contentera de démarrer « sèchement » sans mentionner la forme indéterminée rencontrée en ne détaillant que 3 ou 4 étapes de calculs. On attend 3-4 lignes dans chaque cas.

1°) ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{3n^2-1}{n^3-2n^2+4}$. Déterminer en justifiant la limite de (u_n).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (1 point)

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ qui converge vers 1 et dont tous les termes sont strictement supérieurs à 1.

Déterminer sans justifier la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{(1+u_n)^2}{1-u_n}$.

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \text{..........}$$

IV. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) a) 1 point ; b) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n{}^2}{8}$ pour tout entier naturel *n*. On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de *n*.

1°) Justifier sans récurrence que pour tout entier naturel *n* on a : $u_n \geqslant 1$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

D'après la calculatrice, la suite (u_n) est ……………………………………………………………

3°) On admet que cette conjecture est vraie. Elle se démontre aisément par récurrence en considérant la phrase $P(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

Démontrer que la suite (u_n) converge (citer le théorème utilisé en utilisant le vocabulaire adapté).

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

4°) On note $\mathbf{l}$ la limite de (u_n). Écrire sans justifier une égalité vérifiée par $\mathbf{l}$ et en déduire la valeur de $\mathbf{l}$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

5°) On considère l'algorithme incomplet ci-contre. Il n'est pas demandé de le programmer sur calculatrice.

a) Compléter cet algorithme afin qu'il permette de déterminer, pour une valeur de $e > 0$ donnée en entrée, le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n - \mathbf{l} < e$.

b) Pour $e = 10^{-6}$, l'algorithme renvoie $n = 15$. Interpréter ce résultat en rédigeant une phrase complète (et seulement une phrase !).

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

………………………………………………………………………

Entrée :
Saisir *e*

Initialisations :
n prend la valeur 0
U prend la valeur 5

Traitement :
Tantque ……………………… **Faire**
    ……………………………
    ……………………………
FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Soit *a* un réel non nul distinct de 1 et de – 1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) La suite (u_n) est-elle convergente ou divergente ? Répondre en une phrase sans justifier.

……………………………………………………………………………………………

2°) Déterminer la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} u_k$ suivant la parité de *n*.

• Si *n* est pair, $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} u_k = \text{..........}$.

• Si *n* est impair, $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} u_k = \text{..........}$.

Corrigé du contrôle du 9-12-2016

I.

Question de cours (1 point accordé uniquement si la propriété est parfaitement citée)

Soit q un réel fixé.
Écrire dans le cadre ci-dessous la règle concernant le comportement asymptotique de la suite $\left(q^n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ suivant les valeurs de q. On répondra sous forme mathématique.

- Si $-1<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.
- Si $q=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$.
- Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.
- Si $q\leqslant-1$, alors q^n n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général :

1°) $u_n=\dfrac{3^{n-1}\times 2^n}{4^{2n}}$; 2°) $u_n=\dfrac{3^n-2^n}{5^{n+1}}$; 3°) $u_n=4^n-\dfrac{3}{2^{-2n}}$; 4°) $u_n=\dfrac{4^{n+1}+4^n}{3^{n+1}+3^n}$.

Dans chaque cas, on justifiera que u_n peut s'écrire sous la forme $......\times(......)^n$ ou comme somme ou différence de telles expressions (les parenthèses ne seront pas forcément utiles dans tous les cas !).
On se contentera de démarrer « sèchement » sans mentionner la forme indéterminée rencontrée en ne détaillant que 3 ou 4 étapes de calculs. On attend 3-4 lignes dans chaque cas.

1°) $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\dfrac{3^n\times 3^{-1}\times 2^n}{\left(4^2\right)^n}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{3\times 2}{4^2}\right)^n=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{3}{8}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{8}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

2°) $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\dfrac{3^n-2^n}{5^n\times 5}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3^n-2^n}{5^n}=\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{3^n}{5^n}-\dfrac{2^n}{5^n}\right)=\dfrac{1}{5}\times\left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right]$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

3°) $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=4^n-3\times 2^{2n}=4^n-3\times 4^n=-2\times 4^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

4°) $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\dfrac{4^n\times 4+4^n}{3^n\times 3+3^n}=\dfrac{4^n\times(4+1)}{3^n\times(3+1)}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\times\dfrac{5}{4}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{3}\right)^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

II.

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{3n^2-1}{n^3-2n^2+4}$. Déterminer en justifiant la limite de $\left(u_n\right)$.

On applique la technique de mise en facteur des monômes de plus haut de degré au numérateur et au dénominateur.

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\dfrac{n^2\left(3-\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^3}\right)}=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{3-\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^3}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{n^2}\right)=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^3}\right)=1$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^3}}=3$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

III.

Soit $\left(u_n\right)$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ qui converge vers 1 et dont tous les termes sont strictement supérieurs à 1.

Déterminer sans justifier la limite de la suite $\left(v_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{\left(1+u_n\right)^2}{1-u_n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty$$

D'une part, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+u_n\right)^2=4$.

D'autre part, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-u_n\right)=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1-u_n<0$ (ce qu'on peut noter $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-u_n\right)=0^-$).

Par limite d'un quotient, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \frac{{u_n}^2}{8}$ pour tout entier naturel *n*. On ne cherchera pas à exprimer u_n en fonction de *n*.

1°) Justifier sans récurrence que pour tout entier naturel *n* on a : $u_n \geqslant 1$.

On raisonne en deux parties.

D'une part, on a $u_0 = 5$ par hypothèse, donc $u_0 > 1$.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{{u_n}^2}{8} \geqslant 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 + \frac{{u_n}^2}{8} \geqslant 1$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geqslant 1$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geqslant 1$. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} > 0$ donc en remplaçant *n* par 0, 1, 2, 3 etc. on obtient $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $u_3 > 0$ …. Or $\mathbb{N}^* = \{1\,;2\,;3\,;...\}$. Donc on peut bien écrire que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geqslant 1$.

En rassemblant les résultats des deux cas, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geqslant 1$.

- Peu d'élèves ont obtenu les deux points à cette question.
- En dépit des apparences, la solution proposée ici n'est pas une récurrence !
Il y a juste une similitude dans le fait de traiter d'abord le cas $n = 0$ puis de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geqslant 1$.
- La quantification est essentielle dans ce type de question. Beaucoup d'élèves ont perdu des points pour des oublis de quantificateurs.

2°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

On rentre la suite dans la calculatrice.
Pour cela, on écrit la relation de récurrence sous la forme $u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{8}$.
En langage de calculatrice, cela donne : $\mathrm{u}(n) = 1 + \left(\mathrm{u}(n-1)^2/8\right)$.

D'après la calculatrice, la suite (u_n) est strictement décroissante.

3°) On admet que cette conjecture est vraie. Elle se démontre aisément par récurrence en considérant la phrase $P(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
Démontrer que la suite (u_n) converge (citer le théorème utilisé en utilisant le vocabulaire adapté).

La suite (u_n) est décroissante d'après le résultat admis.

De plus, elle est minorée par 1 d'après la question 1°).

Or toute suite décroissante minorée converge donc la suite (u_n) converge.

4°) On note $\mathbf{l}$ la limite de (u_n). Écrire sans justifier une égalité vérifiée par $\mathbf{l}$ et en déduire la valeur de $\mathbf{l}$.

On a : $\mathbf{l} = 1 + \frac{\mathbf{l}^2}{8}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \mathbf{l}^2 - 8\mathbf{l} + 8 = 0$
$\Leftrightarrow \mathbf{l} = 4 - 2\sqrt{2}$ ou $\mathbf{l} = 4 + 2\sqrt{2}$ (résolution grâce au discriminant réduit $\Delta' = 8$)

D'après l'énoncé, la suite (u_n) est décroissante donc elle majorée par son premier terme $u_0 = 5$.
Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant 5$. On en déduit, par une propriété du cours, que $\mathbf{l} \leqslant 5$.

On en déduit que $\mathbf{l} = 4 - 2\sqrt{2}$.

5°) On considère l'algorithme incomplet ci-contre. Il n'est pas demandé de le programmer sur calculatrice.

a) Compléter cet algorithme afin qu'il permette de déterminer, pour une valeur de $e > 0$ donnée en entrée, le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n - \mathbf{l} < e$.

L'algorithme proposé ci-contre est un algorithme de détermination de valeur seuil.

b) Pour $e = 10^{-6}$, l'algorithme renvoie $n = 15$. Interpréter ce résultat en rédigeant une phrase complète (et seulement une phrase !).
Le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n - \mathbf{l} < 10^{-6}$ est 15.

Entrée :
Saisir *e*

Initialisations :
n prend la valeur 0
U prend la valeur 5

Traitement :
Tantque $\mathrm{U} - (4 - 2\sqrt{2}) \geqslant e$ **Faire**
  U prend la valeur $1 + \frac{\mathrm{U}^2}{8}$
  n prend la valeur $n + 1$
FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

V.

Soit *a* un réel non nul distinct de 1 et de – 1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) La suite (u_n) est-elle convergente ou divergente ? Répondre en une phrase sans justifier.

La suite (u_n) est divergente.

En effet, on démontre aisément que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = u_n$ ce qui montre que la suite (u_n) est périodique de période 2.
Ainsi, si *n* est pair, $u_n = a$ et si *n* est impair, $u_n = \frac{1}{a}$.
Comme *a* est un réel non nul distinct de 1 et de – 1, *a* est différent de $\frac{1}{a}$.

2°) Déterminer la valeur de $\prod_{k=0}^{k=n} u_k$ suivant la parité de n.

• Si n est pair, $\prod_{k=0}^{k=n} u_k = a$.

• Si n est impair, $\prod_{k=0}^{k=n} u_k = 1$.

Justification :

L'astuce consiste à effectuer des groupements de termes par 2.

1er cas : n est pair

$$\prod_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \times u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_{n-2} \times u_{n-1} \times u_n$$

$$= \left(a \times \frac{1}{a}\right) \times \left(a \times \frac{1}{a}\right) \times \ldots \times \left(a \times \frac{1}{a}\right) \times a$$

$$= 1 \times 1 \times \ldots \times 1 \times a$$

$$= a$$

2e cas : n est impair

$$\prod_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \times u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_{n-1} \times u_n$$

$$= \left(a \times \frac{1}{a}\right) \times \left(a \times \frac{1}{a}\right) \times \ldots \times \left(a \times \frac{1}{a}\right)$$

$$= 1 \times 1 \times \ldots \times 1$$

$$= 1$$