TS1

Devoir pour le lundi 12-12-2016

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $P_n = \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$.

1°) Exprimer P_n en fonction de n.

2°) On admet la propriété suivante :

> Soit (a_n) une suite réelle et ℓ un réel.
> Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n+1} = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$.

Cette propriété peut aussi se formuler de la manière suivante :

Soit (a_n) une suite réelle.
Si la suite des termes d'indices pairs et la suite des termes d'indices impairs convergent vers un même réel ℓ, alors la suite (a_n) converge aussi vers ℓ.

Quelle est la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Ce devoir a été cherché en classe, par groupes de quatre élèves, durant plusieurs jours.

Les indications ont été données au fur et à mesure jusqu’à aboutir à une version « propre » de la solution.

Corrigé du DM pour le 12-12-2016

1°)

● On commence par calculer les premiers termes de la suite (P_n) à la main.

$P_2=\dfrac{3}{2}$ $\qquad P_3=1$ $\qquad P_4=\dfrac{5}{4}$ $\qquad P_5=1$ $\qquad P_6=\dfrac{7}{6}$

Le calcul des premiers termes à la main fait apparaître un télescopage par groupes de 2.
On peut commencer à formuler une conjecture.

● On peut ensuite obtenir une table de valeurs de la suite grâce à la calculatrice.

On met la calculatrice en mode suite.

$n\text{Min}=2$

$u(n)=\text{prod}\left(\text{suite}\left(1+(-1)\wedge\text{K/K}\right),\ \text{K},\ 2,\ n,1\right)$ (en bleu : le pas, indispensable sur certaines calculatrice)

List $\longrightarrow$ MATH $\longrightarrow$ prod(

List $\longrightarrow$ OPS $\longrightarrow$ séq(ou suite(

Ti 83-CE Premium

Expr : $1+(-1)\wedge\text{K/K}$ Variable : K début : 2 fin : n pas : 1 coller	Expr : $1+(-1)\wedge\text{K/K}$ Variable : K start : 2 end : n step : 1 paste

● On peut à présent formuler une conjecture.

Il semble que pour n pair, on a : $P_n=\dfrac{n+1}{n}$ et que pour n impair, on a : $P_n=1$.

● Nous allons établir une égalité qui permet de trouver facilement une expression simplifiée de P_n.

Pour tout entier naturel $k\geqslant 2$, on pose $u_k=1+\dfrac{(-1)^k}{k}$. Ainsi, pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, on a : $P_n=\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}u_k$.

Démontrons que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ $u_{2p} \times u_{2p+1} = 1$.

On démontre ce résultat par calcul, sans récurrence. Je précise cela car lors de la recherche en classe certains élèves se sont posés la question de faire une démonstration par récurrence.

$$\begin{aligned} u_{2p} &= 1 + \frac{(-1)^{2p}}{2p} \\ &= 1 + \frac{1}{2p} \\ &= \frac{2p+1}{2p} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_{2p+1} &= 1 + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2p+1} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $u_{2p} \times u_{2p+1} = \dfrac{2p+1}{p} \times \dfrac{2p}{2p+1} = 1$.

● On déterminer enfin l'expression simplifiée de P_n pour $n \geqslant 2$.

1$^{\text{er}}$ cas : *n* impair

Dans ce cas, on pose $n = 2m+1$ où *m* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= \underbrace{(u_2 \times u_3)}_{1} \times \underbrace{(u_4 \times u_5)}_{1} \times \ldots \times \underbrace{(u_{2m} \times u_{2m+1})}_{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2$^{\text{e}}$ cas : *n* pair

Dans ce cas, on pose $n = 2m$ où *m* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned} P_{2m} &= \underbrace{(u_2 \times u_3)}_{1} \times \underbrace{(u_4 \times u_5)}_{1} \times \ldots \times \underbrace{(u_{2m-2} \times u_{2m-1})}_{1} \times u_{2m} \\ &= u_{2m} \\ &= 1 + \frac{1}{2m} \end{aligned}$$

On peut aussi écrire $P_{2m} = \dfrac{2m+1}{2m}$ ce qui donne $P_n = \dfrac{n+1}{n}$.

2°) On admet la propriété suivante :

> Soit (a_n) une suite réelle et ℓ un réel.
> Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n+1} = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$.

Cette propriété peut aussi se formuler de la manière suivante :

Soit (a_n) une suite réelle.
Si la suite des termes d'indices pairs et la suite des termes d'indices impairs convergent vers un même réel ℓ, alors la suite (a_n) converge aussi vers ℓ.

Quelle est la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$?

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad P_{2m} = 1 + \frac{1}{2m} \text{ donc } \lim_{m \to +\infty} P_{2m} = 1 \text{ car } \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2m} = 0.$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad P_{2m+1} = 1 \quad \text{donc } \lim_{m \to +\infty} P_{2m+1} = 1.$$

D'après la propriété admise, on en déduit que la suite (P_n) converge vers 1. Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 1$.