TS1

Contrôle du samedi 26 novembre 2016 (2 heures)

Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé.

Pour les exercices **II**, **III** et **IV**, on portera un soin tout particulier à la rédaction qui sera prise en compte dans la notation.

On veillera également pour ces trois exercices à apporter une grande attention à la présentation des calculs.

I. (6 points)

Cet exercice est un QCM composé de 6 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

a. $F : x \mapsto \dfrac{x^2 e^x}{2}$ b. $F : x \mapsto (x-1)e^x$ c. $F : x \mapsto (1-x)e^x + 3$

2°) Pour tout entier naturel n, l'expression $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} e^{2k}$ est égale à :

a. e^{2n+2} b. $e^{n(n+1)}$ c. $e^{n(n-1)}$

3°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-\frac{x+2}{x}} \leqslant \dfrac{1}{e^2}$ est égal à :

a. $]0\,;2]$ b. $]-\infty\,;2]$ c. $[2\,;+\infty[$

4°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1-2e^x)^n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 est donnée par :

a. $-2ne^x(1-2e^x)^{n-1}$ b. $n(1-2e^x)^{n-1}$ c. $2ne^x(1-2e^x)^{n-1}$

5°) Pour tout entier naturel n, l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} e^k$ est égale à :

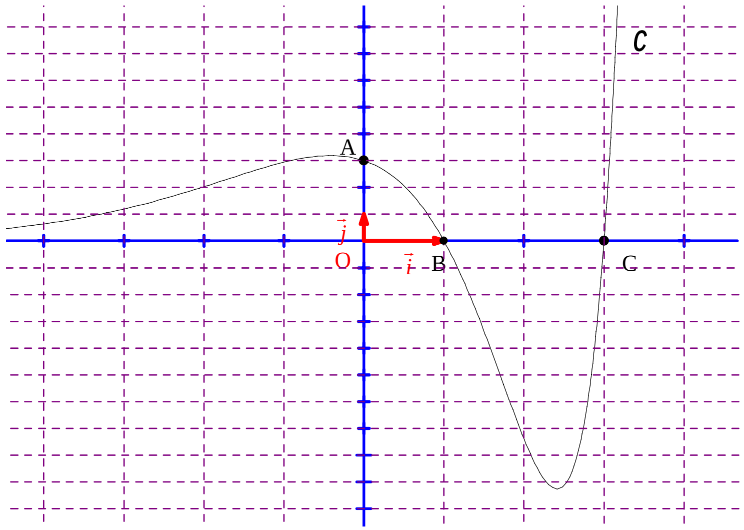
a. $\dfrac{e^n-1}{e-1}$ b. $\dfrac{e^{n+1}-1}{e-1}$ c. $\dfrac{e^{n+1}-1}{e^n-1}$

6°) L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-e^x}}$ est égal à :

a. $[0\,;\ln 2[$ b. $]-\infty\,;\ln 2]$ c. $]-\infty\,;\ln 2[$

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto (ax^2+bx+c)e^x$ où a, b et c désignent trois nombres réels.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni du repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée sur le graphique ci-dessous.
On admet que $\mathcal{C}$ passe par les points $A(0\,;3)$, $B(1\,;0)$ et $C(3\,;0)$.



Ne rien écrire sur le graphique.

1°) Déterminer a, b, c. Il est demandé de détailler la démarche. En revanche, on pourra se contenter d'écrire uniquement les étapes les plus importantes du calcul.

2°) On suppose que a, b, c ont les valeurs trouvées à la question précédente.

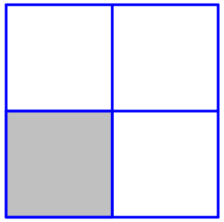
Démontrer que la droite (AC) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
On attend une rédaction la plus concise et la plus claire possible.

3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
Vérifier sur le graphique la cohérence des résultats obtenus.

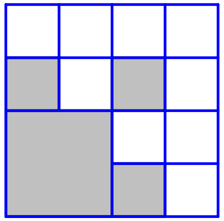
III. (5 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

Première étape du coloriage : on partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-dessous (la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage : on partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On poursuit les étapes du coloriage en continuant indéfiniment le même procédé.

1°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on désigne par a_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale non coloriée (blanche) à l'étape *n*. On a ainsi $a_1 = 3$.

a) Calculer a_2.

b) Exprimer sans justifier a_{n+1} en fonction de a_n pour *n* entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

c) Exprimer a_n en fonction de *n* (*n* entier naturel supérieur ou égal à 1).

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on désigne par b_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale coloriée à l'étape *n*.

a) Exprimer b_n en fonction de *n*. On donnera l'expression directement sans justifier.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$. On attend une justification précise avec la rédaction adéquate.
Un résultat mal justifié ou non justifié ne sera pas pris en compte.

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point + 1 point)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \prod\limits_{k=1}^{k=n} \left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k^2} \right)$.

1°) Calculer u_4 (valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible).

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \prod\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{k+1}{k}$.

Déterminer une expression simplifiée de v_n en fonction de *n*. On attend la démarche détaillée.

3°) En utilisant la suite (v_n), démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{n+1}{n!}$.

4°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. On commencera par écrire u_n sous la forme $u_n = \dfrac{1}{....} + \dfrac{1}{....}$.

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (6 points)

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	6°)	
Réponse							

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (5 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) a) ……………………………………………………………………………………………………

………

b) ………………………………….. (une seule égalité, sans justifier)

c) ………………………………….. (une seule égalité, sans justifier)

2°) a) ………………………………….. (une seule égalité, sans justifier)

b) ……

………

………

………

………

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point + 1 point)

1°) ………………………………………………………………………………………………………

………

………

2°) ………………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

………

3°) ………………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

………

………

4°) ………………………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 26-11-2016

I.

Cet exercice est un QCM composé de 6 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

a. $F : x \mapsto \dfrac{x^2 e^x}{2}$ b. $F : x \mapsto (x-1)e^x$ c. $F : x \mapsto (1-x)e^x + 3$

2°) Pour tout entier naturel n, l'expression $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} e^{2k}$ est égale à :

a. e^{2n+2} b. $e^{n(n+1)}$ c. $e^{n(n-1)}$

3°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-\frac{x+2}{x}} \leqslant \dfrac{1}{e^2}$ est égal à :

a. $]0\,;2]$ b. $]-\infty\,;2]$ c. $[2\,;+\infty[$

4°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1-2e^x)^n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 est donnée par :

a. $-2ne^x(1-2e^x)^{n-1}$ b. $n(1-2e^x)^{n-1}$ c. $2ne^x(1-2e^x)^{n-1}$

5°) Pour tout entier naturel n, l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} e^k$ est égale à :

a. $\dfrac{e^n-1}{e-1}$ b. $\dfrac{e^{n+1}-1}{e-1}$ c. $\dfrac{e^{n+1}-1}{e^n-1}$

6°) L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-e^x}}$ est égal à :

a. $[0\,;\ln 2[$ b. $]-\infty\,;\ln 2]$ c. $]-\infty\,;\ln 2[$

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	6°)
Réponse	b	b	a	a	b	c

1°) On prend la fonction $F : x \mapsto (x-1)e^x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x$$
$$= (1+x-1)\times e^x$$
$$= xe^x$$
$$= f(x)$$

Attention (piège), la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 e^x}{2}$ n'est pas la fonction $x \mapsto xe^x$ car la dérivée d'un produit n'est pas égale à au produit des dérivées.

2°)

1^ère méthode :

$$\prod_{k=0}^{k=n} e^{2k} = e^{2\times 0} \times e^{2\times 1} \times e^{2\times 2} \times \ldots \times e^{2\times n}$$

$= e^{2\times 0+2\times 1+2\times 2+\ldots+2\times n}$ (le produit des exponentielles est égal à l'exponentielle de la somme)

$= e^{2\times(0+1+2+\ldots+n)}$

$= e^{\cancel{2}\times\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}}$ (formule de la somme des entiers naturels consécutifs de 0 à n)

$= e^{n(n+1)}$

2^e méthode :

On utilise la formule du cours : $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} e^{x_i} = e^{\sum_{k=0}^{k=n} x_i}$.

3°)

On résout l'inéquation $e^{-\frac{x+2}{x}} \leqslant \frac{1}{e^2} \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow e^{-\frac{x+2}{x}} \leqslant e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x+2}{x} \leqslant -2$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{x+2}{x} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x} \leqslant 0$$

$\Leftrightarrow 0 < x \leqslant 2$ (après avoir fait éventuellement un tableau de signes)

4°) On utilise la formule de dérivation $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = n \times \left(-2e^x\right) \times \left(1-2e^x\right)^{n-1}$$

$$= -2ne^x\left(1-2e^x\right)^{n-1}$$

5°)

$$\sum_{k=0}^{k=n} e^k = \frac{e^{n+1}-1}{e-1}$$

On applique la formule $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ valable pour $q \neq 1$ que l'on applique à $q = e$.

6°)

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow 2-e^x > 0$

$\Leftrightarrow e^x < 2$

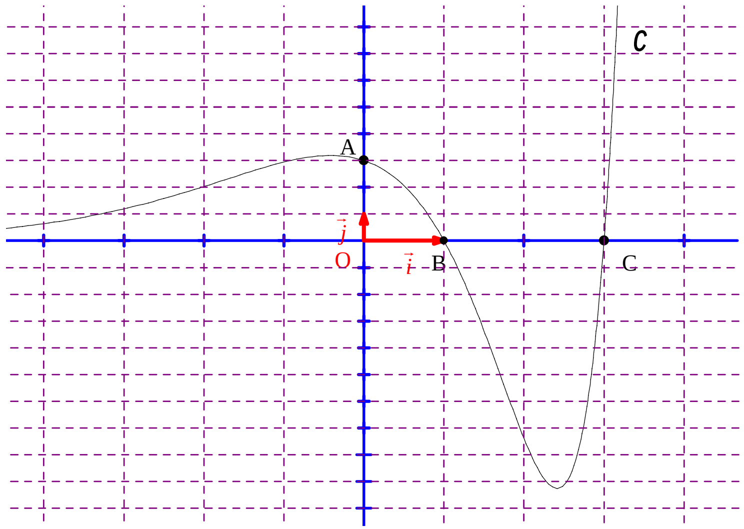
$\Leftrightarrow x < \ln 2$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(ax^2+bx+c\right)e^x$ où a, b et c désignent trois nombres réels.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni du repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous.

On admet que $\mathcal{C}$ passe par les points $A(0\,;3)$, $B(1\,;0)$ et $C(3\,;0)$.



Ne rien écrire sur le graphique.

1°) Déterminer a, b, c. Il est demandé de détailler la démarche. En revanche, on pourra se contenter d'écrire uniquement les étapes les plus importantes du calcul.

$A \in \mathcal{C}$ donc $e^0\left(a \times 0^2 + b \times 0 + c\right) = 3$ d'où $c = 3$.

$B \in \mathcal{C}$ donc $e^1\left(a \times 1^2 + b \times 1 + 3\right) = 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow a+b+3=0 \quad (1') \quad (\text{car } e \neq 0)$

$C \in \mathcal{C}$ donc $e^3\left(a \times 3^2 + b \times 3 + 3\right) = 0 \quad (2)$.

$(2) \Leftrightarrow 9a+3b+3=0 \quad (2') \quad (\text{car } e^3 \neq 0)$

$$\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-3 \\ 9a+3b=-3 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \times(-3) \\ \times 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 9 \\ \times(-1) \end{array}$$

Les nombres placés à droite des deux égalités sont des multiplicateurs.
Ils servent à former des combinaisons linéaires des deux égalités.
Ils fonctionnent colonne par colonne.

On multiplie d'abord la première égalité par – 3 et la deuxième égalité par 1 (ce qui revient à ne rien faire).
On obtient $\begin{cases} -3a-3b=9 \\ 9a+3b=-3 \end{cases}$. On additionne membre à membre les deux équations. Les b disparaissent (les coefficients multiplicateurs ont été choisis pour ça).

On multiplie ensuite la première égalité par 9 et la deuxième égalité par– 1
On obtient $\begin{cases} 9a+9b=-27 \\ -9a-3b=3 \end{cases}$. On additionne membre à membre les deux équations. Les a disparaissent (les coefficients multiplicateurs ont été choisis pour ça).

Les deux opérations doivent être faites en calcul mental.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a=6 \\ 6b=-24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}$$

Conclusion : $a=1$; $b=-4$; $c=3$

2°) On suppose que a, b, c ont les valeurs trouvées à la question précédente.

Démontrer que la droite (AC) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
On attend une rédaction la plus concise et la plus claire possible.

On dérive d'abord la fonction f.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \text{e}^x\left(x^2-4x+3\right)+\text{e}^x(2x-4)$$

$$= \text{e}^x\left(x^2-2x-1\right)$$

Le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est égal à $f'(0)=-1$.

Par ailleurs, le coefficient directeur de la droite (AC) est égal à $\dfrac{y_\text{C}-y_\text{A}}{x_\text{C}-x_\text{A}}=-1$. Il est donc égal au coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{C}$.
On en déduit que (AC) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
Vérifier sur le graphique la cohérence des résultats obtenus.

Les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f'(x)=0 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(x^2-2x-1\right)\text{e}^x=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \quad (\text{car } \text{e}^x \neq 0 \text{ pour tout réel } x)$$

$$\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2} \text{ ou } x=1-\sqrt{2} \quad (\text{résolution grâce au discriminant réduit } \Delta'=2)$$

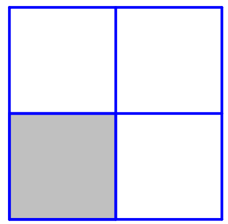
On en conclut que les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses sont $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

On vérifie que ces résultats sont cohérents avec le graphique.

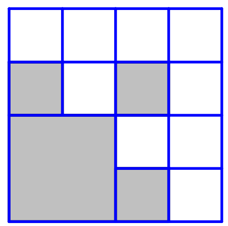
III.

On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

Première étape du coloriage : on partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-dessous (la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage : on partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On poursuit les étapes du coloriage en continuant indéfiniment le même procédé.

1°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on désigne par a_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale non coloriée (blanche) à l'étape n. On a ainsi $a_1 = 3$.

a) Calculer a_2.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{4}a_1 = \frac{9}{4}$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

Sur la figure, on compte 9 petits carrés blancs.
Chacun de ces carrés a une aire de $0,5^2\ \text{cm}^2$ soit $0,25\ \text{cm}^2$.
Donc l'aire totale non colorée à l'étape 2 est égale à $2,25$ d'où $a_2 = 2,25$.

b) Exprimer sans justifier a_{n+1} en fonction de a_n pour n entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{4}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n$$

c) Exprimer a_n en fonction de n (n entier naturel supérieur ou égal à 1).

D'après la question précédente, (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ d'où

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n &= a_1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on désigne par b_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale coloriée à l'étape n.

a) Exprimer b_n en fonction de n. On donnera l'expression directement sans justifier.

On raisonne géométriquement avec les aires.
L'aire colorée à l'étape n est égale à l'aire du carré diminuée de l'aire non colorée à l'étape n.
Le carré initial a pour aire $2^2\ \text{cm}^2 = 4\ \text{cm}^2$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = 4 - a_n$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = 4 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

On peut aussi écrire $b_n = 4 - 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$. On attend une justification précise avec la rédaction adéquate.
Un résultat mal justifié ou non justifié ne sera pas pris en compte.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0 \text{ car } -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \left[3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] = 0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 4 - 0 = 4$ (par limite d'une somme).
Ce résultat peut aisément s'interpréter géométriquement.

IV.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \prod\limits_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right)$.

1°) Calculer u_4 (valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible).

$$\begin{aligned} u_4 &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1^2}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \\ &= 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{16} \\ &= 2 \times \frac{3}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{9} \times \frac{5}{16} \quad \text{(on simplifie le plus possible)} \\ &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \prod\limits_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{k}$.

Déterminer une expression simplifiée de v_n en fonction de n. On attend la démarche détaillée.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On applique la méthode de télescopage multiplicatif.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n &= \frac{\cancel{2}}{1} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \ldots \times \frac{n+1}{\cancel{n}} \\ &= n+1 \end{aligned}$$

2[e] méthode :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{\prod_{k=1}^{k=n} (k+1)}{\prod_{k=1}^{k=n} k}$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$= n+1$$

3°) En utilisant la suite (v_n), démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \frac{n+1}{n!}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{k^2}$$

$$= \prod_{k=1}^{k=n} \left(\frac{k+1}{k} \times \frac{1}{k} \right)$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{k} \right) \times \left(\prod_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \right)$$

$$= v_n \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{k=n} k}$$

$$= v_n \times \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{v_n}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{n!}$$

4°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. On commencera par écrire u_n sous la forme $u_n = \frac{1}{....} + \frac{1}{....}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$ (limite de référence).

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1)! = +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 0$.

Donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.