1ère S1

Contrôle du mardi 29 novembre 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………….………….

Note : ….. / 20

I. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

On dispose de trois sacs S_1, S_2, S_3 contenant des jetons marqués chacun par une lettre. Le sac S_1 contient trois jetons marqués A, B, C. Le sac S_2 contient deux jetons marqués C et D. Le sac S_3 contient deux jetons marqués E et F. On tire au hasard dans l'ordre un jeton de S_1, puis un jeton de S_2 et enfin un jeton de S_3. On obtient alors un « mot » de trois lettres.
On note X le nombre de voyelles de ce mot.
On note *P* la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

1°) Compléter la phrase suivante :

X peut prendre les valeurs $x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X. On écrira les probabilités sous la forme de fractions ayant toutes le même dénominateur.

x_i	
$P(\mathrm{X} = x_i)$	

2°) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Donner l'expression de F. On se contentera de donner les résultats en distinguant des cas sans détailler les calculs (un cas par ligne).

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point ; 3°) 3 points)

On considère le jeu suivant pour lequel une partie se déroule de la manière suivante :
- Le joueur lance deux fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
- Si elle tombe deux fois sur « pile », le joueur gagne 2 €. Si elle tombe une fois sur « pile », le joueur perd *m* € où *m* est un entier naturel distinct de 2. Sinon (la pièce tombe deux fois sur « face »), le joueur perd 2 €.

On note X le gain algébrique en euros du joueur à l'issue d'une partie.
On note *P* la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

1°) Compléter la phrase suivante :

X peut prendre les valeurs $x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	
$P(\mathrm{X} = x_i)$	

2°) Calculer l'espérance et la variance de X en fonction de *m*.
On détaillera uniquement sur les lignes ci-dessous le calcul de la variance (2 ou 3 étapes de calculs seulement en écrivant directement la formule utilisée en « situation »).

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

…..……………………………………………………………………………………………………

3°) On décide de modifier le jeu de la manière suivante :
- on double tous les gains ;
- le joueur verse une mise initiale de 1 euro avant de jouer.

On note Y le nouveau gain algébrique en euros du joueur à l'issue d'une partie.

Exprimer sans justifier Y en fonction de X.

……………………………….. (une seule égalité)

En déduire directement à l'aide de formules du cours, l'espérance et la variance de Y en fonction de *m*.

$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On choisit au hasard un entier naturel de 1 à 50. Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme des chiffres de ce nombre.
On donne les résultats suivants :

La somme vaut 1 dans 2 cas.
La somme vaut 2 dans 3 cas.
La somme vaut 3 dans 4 cas.
La somme vaut 4 dans 5 cas.
La somme vaut 5 dans 6 cas.
La somme vaut 6 dans 5 cas.
La somme vaut 7 dans 5 cas.
La somme vaut 8 dans 5 cas.
La somme vaut 9 dans 5 cas.
La somme vaut 10 dans 4 cas.
La somme vaut 11 dans 3 cas.
La somme vaut 12 dans 2 cas.
La somme vaut 13 dans 1 cas.

1°) Préciser les éventualités correspondant à l'événement $(\mathrm{X}=2)$.

Les éventualités correspondant à l'événement $(\mathrm{X}=2)$ sont ……………………………………………………

(écrire les entiers sans égalités, uniquement séparés par une virgule)

2°) Préciser les éventualités correspondant à l'événement $(\mathrm{X}=9)$.

…..………

3°) Calculer $P(\mathrm{X}\leqslant 5)$. Donner le résultat en écriture décimale.

…..…………………………………………… (une seule égalité sans justifier)

IV. (2 points)

À tout réel a on associe la fonction $f_a : x \mapsto (2x-a)^2 - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Former sans explication le tableau de variations de f_a.
On utilisera la règle pour tracer les flèches de variations et l'on n'oubliera pas d'écrire la valeur de l'extremum calculé préalablement au brouillon.

Compléter les phrases suivantes décrivant les variations de f_a sur $\mathbb{R}$.

La fonction f_a est ……………………………………………………… sur l'intervalle …………………… .

La fonction f_a est ……………………………………………………… sur l'intervalle …………………… .

V. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{3}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Écrire $f(x)$ en fonction de x sous la forme d'un seul quotient.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ ………………………………………… (une seule égalité)

VI. (3 points)

Lorsque c'est l'été en France, il y a 5 heures de décalage avec le Brésil, c'est-à-dire qu'il est 7 heures à Rio de Janeiro quand il est 12 heures à Paris.
Compléter l'algorithme ci-dessous en langage naturel afin qu'il affiche en sortie l'heure de Rio de Janeiro quand on donne en entrée l'heure à Paris en été. On utilisera les variables x et y (et uniquement celles-ci) où x désigne l'heure à Paris $(0 \leqslant x \leqslant 24)$ et y l'heure au même moment à Rio de Janeiro.
Dans la partie traitement, on utilisera l'instruction conditionnelle « Si $x \geqslant 5$ ».

• Il n'est pas demandé de réaliser le programme correspondant sur calculatrice.

• On respectera les règles usuelles de rédaction d'un algorithme. En particulier, on rappelle que l'affectation d'une variable s'écrit « a prend la valeur … ».

• On veillera également à utiliser une « barre d'indentation » (à faire à la règle) permettant une meilleure lisibilité.

Entrée :

Traitement :

Sortie :

Corrigé du contrôle du 29-11-2016

I.

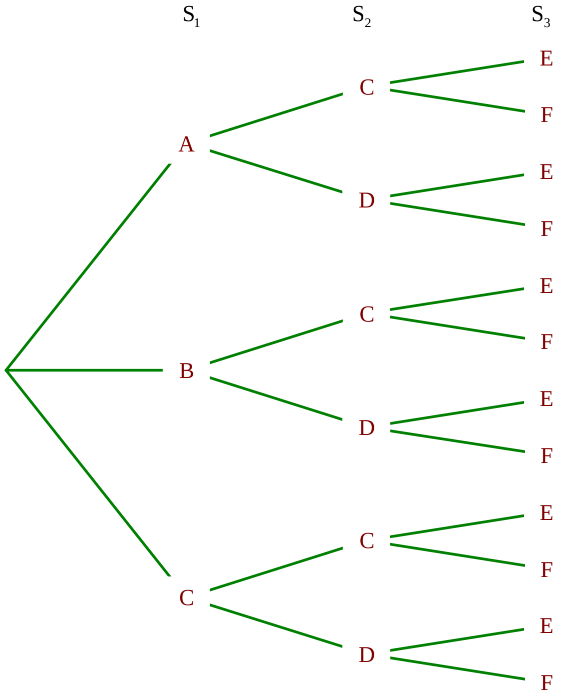
On dispose de trois sacs S_1, S_2, S_3 contenant des jetons marqués chacun par une lettre. Le sac S_1 contient trois jetons marqués A, B, C. Le sac S_2 contient deux jetons marqués C et D. Le sac S_3 contient deux jetons marqués E et F. On tire au hasard dans l'ordre un jeton de S_1, puis un jeton de S_2 et enfin un jeton de S_3. On obtient alors un « mot » de trois lettres.
On note X le nombre de voyelles de ce mot.
On note P la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

1°) Compléter la phrase suivante :

X peut prendre les valeurs $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X. On écrira les probabilités sous la forme de fractions ayant toutes le même dénominateur.

x_i	0	1	2
$P(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{4}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{2}{12}$



Mot	Valeur de X
ACE	2
ACF	1
ADE	2
ADF	1
BCE	1
BCF	0
BDE	1
BDF	0
CCE	1
CCF	0
CDE	1
CDF	0

Les valeurs possibles de X sont donc $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

$$P(\mathrm{X} = 0) = \frac{4}{12}$$

$$P(\mathrm{X} = 1) = \frac{6}{12}$$

$$P(\mathrm{X} = 2) = \frac{2}{12}$$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

2°) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Donner l'expression de F. On se contentera de donner les résultats en distinguant des cas sans détailler les calculs (un cas par ligne).

- Si $x < 0$, alors $F(x) = 0$.
- Si $0 \leqslant x < 1$, alors $F(x) = \dfrac{4}{12}$.
- Si $1 \leqslant x < 2$, alors $F(x) = \dfrac{10}{12}$.
- Si $x \geqslant 2$, alors $F(x) = 1$.

II.

On considère le jeu suivant pour lequel une partie se déroule de la manière suivante :

▪ Le joueur lance deux fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.

▪ Si elle tombe deux fois sur « pile », le joueur gagne 2 €. Si elle tombe une fois sur « pile », le joueur perd *m* € où *m* est un entier naturel distinct de 2. Sinon (la pièce tombe deux fois sur « face »), le joueur perd 2 €.

On note X le gain algébrique en euros du joueur à l'issue d'une partie.

On note *P* la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

1°) Compléter la phrase suivante :

X peut prendre les valeurs $x_1 = -2$, $x_2 = -m$, $x_3 = 2$.

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	-2	$-m$	2
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

On note P le résultat pile et F le résultat face.

À l'issue des deux lancers, il y a quatre résultats possibles : $(P\,;P)$, $(P\,;F)$, $(F\,;P)$, $(F\,;F)$.

Tous les résultats ont la même probabilité donc chaque résultat a pour probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Pour le résultat $(P\,;P)$, le gain algébrique est de $4-3=1$ €.

Pour le résultat $(P\,;F)$, le gain algébrique est de $-1-3=-4$ €.

Pour le résultat $(F\,;P)$, le gain algébrique est de $-1-3=-4$ €.

Pour le résultat $(F\,;F)$, le gain algébrique est de $0-3=-3$ €.

$P(X=-2)=\dfrac{1}{4}$ $\qquad P(X=-m)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ (on « rassemble » les deux résultats) $\qquad P(X=2)=\dfrac{1}{4}$

2°) Calculer l'espérance et la variance de X en fonction de *m*.

On détaillera uniquement sur les lignes ci-dessous le calcul de la variance (2 ou 3 étapes de calculs seulement en écrivant directement la formule utilisée en « situation »).

$E(X) = -\dfrac{m}{2}$ $\qquad V(X) = 2 + \dfrac{m^2}{4}$

Pour le calcul de la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens.

$$\begin{aligned} V(X) &= {x_1}^2 \times P(X=x_1) + {x_2}^2 \times P(X=x_2) + {x_3}^2 \times P(X=x_3) - \left[E(X)\right]^2 \\ &= (-2)^2 \times \frac{1}{4} + (-m)^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} - \left(-\frac{m}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{m^2}{2} + 1 - \frac{m^2}{4} \\ &= 2 + \frac{m^2}{4} \end{aligned}$$

3°) On décide de modifier le jeu de la manière suivante :

- on double tous les gains ;
- le joueur verse une mise initiale de 1 euro avant de jouer.

On note Y le nouveau gain algébrique en euros du joueur à l'issue d'une partie.

Exprimer sans justifier Y en fonction de X.

$Y = 2X - 1$ (une seule égalité)

En déduire directement à l'aide de formules du cours, l'espérance et la variance de Y en fonction de *m*.

$E(Y) = -1 - m$ $\qquad V(Y) = m^2 + 8$

III.

On choisit au hasard un entier naturel de 1 à 50. Soit X la variable aléatoire correspondant à la somme des chiffres de ce nombre.
On donne les résultats suivants :

La somme vaut 1 dans 2 cas.
La somme vaut 2 dans 3 cas.
La somme vaut 3 dans 4 cas.
La somme vaut 4 dans 5 cas.
La somme vaut 5 dans 6 cas.
La somme vaut 6 dans 5 cas.
La somme vaut 7 dans 5 cas.
La somme vaut 8 dans 5 cas.
La somme vaut 9 dans 5 cas.
La somme vaut 10 dans 4 cas.
La somme vaut 11 dans 3 cas.
La somme vaut 12 dans 2 cas.
La somme vaut 13 dans 1 cas.

1°) Préciser les éventualités correspondant à l'événement $(\mathrm{X}=2)$.

Les éventualités correspondant à l'événement $(\mathrm{X}=2)$ sont 2, 11, 20.

(écrire les entiers sans égalités, uniquement séparés par une virgule)

2°) Préciser les éventualités correspondant à l'événement $(\mathrm{X}=9)$.

Les éventualités correspondant à l'événement $(\mathrm{X}=9)$ sont 9, 18, 27, 36, 45.

3°) Calculer $P(\mathrm{X}\leqslant 5)$. Donner le résultat en écriture décimale.

$P(\mathrm{X}\leqslant 5)=0,4$ (une seule égalité sans justifier)

IV.

À tout réel a on associe la fonction $f_a : x \mapsto (2x-a)^2 - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Former sans explication le tableau de variations de f_a.
On utilisera la règle pour tracer les flèches de variations et l'on n'oubliera pas d'écrire la valeur de l'extremum calculé préalablement au brouillon.

On commence par transformer l'expression de f_a.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_a(x) = 3x^2 - 4ax + a^2$

Ainsi, f_a est une fonction polynôme du second degré.

Son minimum est atteint pour $x = -\dfrac{-4a}{2\times 3} = \dfrac{2a}{3}$.

$$\begin{aligned} f_a\left(\frac{2a}{3}\right) &= \left(2\times\frac{2a}{3}-a\right)^2 - a^2 \\ &= \left(\frac{a}{3}\right)^2 - a^2 \\ &= -\frac{8a^2}{9} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\dfrac{2a}{3}$		$+\infty$
Variations de f_a		$\searrow$	$-\dfrac{8a^2}{9}$	$\nearrow$	

Compléter les phrases suivantes décrivant les variations de f_a sur $\mathbb{R}$.

La fonction f_a est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{2a}{3}\right]$.

La fonction f_a est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{2a}{3}\,;+\infty\right[$.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{3}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Écrire $f(x)$ en fonction de x sous la forme d'un seul quotient.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \qquad f(x) = \dfrac{4-3x}{(x-1)^2}$ (une seule égalité)

VI.

Lorsque c'est l'été en France, il y a 5 heures de décalage avec le Brésil, c'est-à-dire qu'il est 7 heures à Rio de Janeiro quand il est 12 heures à Paris.
Compléter l'algorithme ci-dessous en langage naturel afin qu'il affiche en sortie l'heure de Rio de Janeiro quand on donne en entrée l'heure à Paris en été. On utilisera les variables x et y (et uniquement celles-ci) où x désigne l'heure à Paris $(0 \leqslant x \leqslant 24)$ et y l'heure au même moment à Rio de Janeiro.
Dans la partie traitement, on utilisera l'instruction conditionnelle « Si $x \geqslant 5$ ».

● Il n'est pas demandé de réaliser le programme correspondant sur calculatrice.

● On respectera les règles usuelles de rédaction d'un algorithme. En particulier, on rappelle que l'affectation d'une variable s'écrit « *a* prend la valeur … ».

● On veillera également à utiliser une « barre d'indentation » (à faire à la règle) permettant une meilleure lisibilité.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $x \geqslant 5$
  | Alors y prend la valeur $x-5$
  | **Sinon** y prend la valeur $x+19$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Le $x+19$ provient du calcul $24-(5-x)$ que l'on évite d'écrire dans l'algorithme car il s'agit d'une expression non simplifiée.