**TS1 et TS3 spécialité**

# Contrôle du lundi 28 novembre 2016 (50 minutes)

………………………………………………………………………………… **Note : …. / 20**

## I. (2 points)

On pose $\mathrm{N}=10^{1026}+1$. En écrivant N sous la forme $\mathrm{N}=100^{\cdots}+1$ et en utilisant $100\equiv-1$ (mod. 101), démontrer que N est divisible par 101.

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

## II. (1 point)

À l'aide de la calculatrice, déterminer un entier naturel $x$ tel que $11x\equiv1$ (mod. 37).

…………… (une seule valeur, sans égalité)

## III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) Compléter le tableau de congruences suivant par des entiers naturels les plus petits possible $(x\in\mathbb{Z})$.

| $x\equiv\ldots$ (mod. 4) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x^2\equiv\ldots$ (mod. 4) | | | | |

2°) L'équivalence « $x^2\equiv1$ (mod. 4) $\Leftrightarrow$ $x$ est impair » est-elle vraie ou fausse ? Justifier brièvement.

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

## IV. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) 4 points)

Les deux questions de l'exercice sont indépendantes.
On attend une démarche rigoureuse, correctement rédigée. En particulier, on mettra en évidence les liens logiques (« donc », « d'où », « par conséquent »…).

1°) Déterminer à l'aide des congruences le reste de la division euclidienne de $2016^{2017}$ par 5.

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

2°) Pour tout entier naturel $n$, on note $r_n$ le reste de la division euclidienne de $2^n$ par 5.
Compléter le tableau ci-contre.
Déterminer à l'aide des congruences le reste de la division euclidienne de $2017^{2016}$ par 5.

| $n$ | $r_n$ |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| 11 | |
| 12 | |
| 13 | |
| 14 | |

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

**V. (7 points : 1°) 4 points ; 2°) a) 1 point ; b) 2 points)**

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1°) Dans cette question, on s'intéresse au reste de la division euclidienne de $4^n$ par 9 où $n$ est un entier naturel.
Déterminer à l'aide des congruences la valeur de ce reste dans chacun des trois cas suivants :
1^er^ cas : $n$ est de la forme $3k$ avec $k \in \mathbb{N}$ ;
2^e^ cas : $n$ est de la forme $3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ ;
3^e^ cas : $n$ est de la forme $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

2°) Soit $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$ des entiers naturels quelconques ($n$ étant un entier naturel).

On pose $\mathrm{A} = \sum_{i=0}^{i=n} 4^{\alpha_i}$.

a) Entourer sans justifier la bonne réponse :

A est congru modulo 3 à :

$n$ $\qquad$ $n+1$ $\qquad$ $n-1$

b) Compléter l'équivalence suivante :

A est divisible par 3 $\Leftrightarrow$ $n$ est de la forme ……………………………………………

# À l’oral

• Dans l’exercice **I**, ne pas utiliser le symbole d’équivalences.

• Dans le tableau de congruences de l’exercice **III**, ne rien écrire à la place des petits points. Remplir les cases de la deuxième ligne.

# Corrigé du contrôle du 28-11-2016

## I.

On pose $N = 10^{1026} + 1$. En écrivant N sous la forme $N = 100^{\cdots} + 1$ et en utilisant $100 \equiv -1$ (mod. 101), démontrer que N est divisible par 101.

On a : $N = \left(10^2\right)^{513} + 1 = 100^{513} + 1$.

Or $100 \equiv -1$ (mod. 101) d'où $100^{513} \equiv (-1)^{513}$ (mod. 101) soit $100^{513} \equiv -1$ (mod. 101).
Par conséquent, $100^{513} + 1 \equiv 0$ (mod. 101) soit $N \equiv 0$ (mod. 101).

On en déduit que N est divisible par 101.

---

## II.

À l'aide de la calculatrice, déterminer un entier naturel $x$ tel que $11x \equiv 1$ (mod. 37).

27 (une seule valeur, <u>sans égalité</u>)

Pour trouver une telle valeur, on utilise la calculatrice, et plus particulièrement sa commande qui permet d'obtenir le reste d'une division euclidienne (ici reste de la division euclidienne de $11x$ par 37).
On obtient un tableau de valeurs dans lequel on cherche un reste de division euclidienne égal à 1.

---

## III.

1°) Compléter le tableau de congruences suivant par des entiers naturels les plus petits possible $(x \in \mathbb{Z})$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x \equiv \ldots$ (mod. 4) | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $x^2 \equiv \ldots$ (mod. 4) | 0 | 1 | 0 | 1 |

2°) L'équivalence « $x^2 \equiv 1$ (mod. 4) $\Leftrightarrow$ $x$ est impair » est-elle vraie ou fausse ? Justifier brièvement.

Cette équivalence est vraie.

1$^{\text{ère}}$ méthode pour justifier :

D'après le tableau de congruences, $x^2 \equiv 1$ (mod. 4) $\Leftrightarrow$ $x \equiv 1$ (mod. 4) ou $x \equiv 3$ (mod. 4).

Or :
- les entiers congrus à 1 modulo 4 sont les entiers relatifs de la forme $1 + 4k$ avec $k$ entier relatif.
- les entiers congrus à 3 modulo 4 sont les entiers relatifs de la forme $3 + 4k$ avec $k$ entier relatif.

Par ailleurs, nous savons que les entiers relatifs se classent en 4 catégories :
- les entiers relatifs de la forme $4k$ avec $k$ entier relatif.
- les entiers relatifs de la forme $1 + 4k$ avec $k$ entier relatif.
- les entiers relatifs de la forme $2 + 4k$ avec $k$ entier relatif.
- les entiers relatifs de la forme $3 + 4k$ avec $k$ entier relatif.

Les entiers relatifs de la première et de la troisième catégorie forment les entiers pairs.
Les entiers relatifs de la troisième et de la quatrième catégorie forment les entiers impairs.

2$^{\text{e}}$ méthode pour justifier :

On raisonne par disjonction de cas.

Lorsque $x$ est pair c'est-à-dire $x \equiv 0$ (mod. 4) ou $x \equiv 2$ (mod. 4), on a : $x^2 \equiv 0$ (mod. 4).

Lorsque $x$ est impair c'est-à-dire $x \equiv 1$ (mod. 4) ou $x \equiv 3$ (mod. 4), on a : $x^2 \equiv 1$ (mod. 4).

On en déduit que $x^2 \equiv 1$ (mod. 4) $\Leftrightarrow$ $x$ est impair.

3$^{\text{e}}$ méthode pour justifier :

On n'utilise pas le tableau de congruences (ce qui est dommage !).
On raisonne par disjonction de cas.

1$^{\text{er}}$ cas : $x$ est pair

Dans ce cas, $x$ s'écrit $2k$ où $k$ est un entier relatif.

$x^2 = 4k^2$ donc $x^2 \equiv 0$ (mod. 4).

2$^{\text{e}}$ cas : $x$ est impair

Dans ce cas, $x$ s'écrit $2k + 1$ où $k$ est un entier relatif.

$x^2 = 4k^2 + 4k + 1$ donc $x^2 \equiv 1$ (mod. 4).

On en déduit que $x^2 \equiv 1$ (mod. 4) $\Leftrightarrow$ $x$ est impair.

---

## IV.

Les deux questions de l'exercice sont indépendantes.
On attend une démarche rigoureuse, correctement rédigée. En particulier, on mettra en évidence les liens logiques (« donc », « d'où », « par conséquent »…).

1°) Déterminer à l'aide des congruences le reste de la division euclidienne de $2016^{2017}$ par 5.

On a : $2016 = 2015 + 1$ donc $2016 \equiv 1$ (mod. 5).
Donc $2016^{2017} \equiv 1^{2017}$ (mod. 5) soit $2016^{2017} \equiv 1$ (mod. 5).
Or $0 \leqslant 1 < 5$.
On en déduit que le reste de la division euclidienne de $2016^{2017}$ par 5 est égal à 1.

2°) Pour tout entier naturel $n$, on note $r_n$ le reste de la division euclidienne de $2^n$ par 5.
Compléter le tableau ci-contre.
Déterminer à l'aide des congruences le reste de la division euclidienne de $2017^{2016}$ par 5.

| $n$ | $r_n$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 3 |
| 4 | 1 |
| 5 | 2 |
| 6 | 4 |
| 7 | 3 |
| 8 | 1 |
| 9 | 2 |
| 10 | 4 |
| 11 | 3 |
| 12 | 1 |
| 13 | 2 |
| 14 | 4 |

Pour remplir le tableau ci-contre (noté sur 0 point), on peut utiliser la calculatrice en utilisant la commande qui donne le reste d'une division euclidienne.
Ce tableau avait pour but d'aider à la résolution de la question sur le reste de la division euclidienne de $2017^{2016}$ par 5.

On a : $2017 = 403 \times 5 + 2$ donc $2017 \equiv 2 \pmod{5}$.
Donc $2017^{2016} \equiv 2^{2016} \pmod{5}$.

Or $2016 = 4 \times 504$.
On a : $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ d'où $\left(2^4\right)^{504} \equiv 1 \pmod{5}$ soit $2^{2016} \equiv 1 \pmod{5}$.
Or $0 \leqslant 1 < 5$.
On en déduit que le reste de la division euclidienne de $2017^{2016}$ par 5 est égal à 1.

## V.

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1°) Dans cette question, on s'intéresse au reste de la division euclidienne de $4^n$ par 9 où $n$ est un entier naturel.
Déterminer à l'aide des congruences la valeur de ce reste dans chacun des trois cas suivants :
1er cas : $n$ est de la forme $3k$ avec $k \in \mathbb{N}$ ;
2e cas : $n$ est de la forme $3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ ;
3e cas : $n$ est de la forme $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Avec la calculatrice, on peut observer une cyclicité d'ordre 3.

**1er cas :** $n$ est de la forme $3k$ avec $k \in \mathbb{N}$
On a alors $4^n = 4^{3k}$.
Or $4^3 \equiv 1$ (mod. 9 d'où $4^{3k} \equiv 1^k \pmod{9}$ soit $4^n \equiv 1 \pmod{9}$.
Par suite, le reste de la division euclidienne de $4^n$ par 9 est 1.

**2e cas :** $n$ est de la forme $3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$
On a alors $4^n = 4^{3k+1}$.
Or $4^{3k} \equiv 1 \pmod{9}$ d'après le 1er cas.
On sait que $4^{3k+1} = 4^{3k} \times 4$.
Donc en multipliant par 4 les deux membres de la relation de congruence, on obtient : $4^{3k+1} \equiv 4 \pmod{9}$ soit $4^n \equiv 4 \pmod{9}$.
Par suite, le reste de la division euclidienne de $4^n$ par 9 est 4.

**3e cas :** $n$ est de la forme $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$
On a alors $4^n = 4^{3k+2}$.
Or $4^{3k+1} \equiv 4 \pmod{9}$ d'après le 2e cas.
On sait que $4^{3k+2} = 4^{3k+1} \times 4$.
Donc en multipliant par 4 les deux membres de la relation de congruence, on obtient $4^{3k+2} \equiv 16 \pmod{9}$ soit $4^n \equiv 16 \pmod{9}$.
Or $16 \equiv 7 \pmod{9}$. Par transitivité de la relation de congruence, on a donc $4^n \equiv 7 \pmod{9}$.
Par suite, le reste de la division euclidienne de $4^n$ par 9 est 7.

Bilan :

- Si $n$ est de la forme $3k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors le reste de la division euclidienne de $4^n$ par 9 est 1.
- Si $n$ est de la forme $3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors le reste de la division euclidienne de $4^n$ par 9 est 4.
- Si $n$ est de la forme $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors le reste de la division euclidienne de $4^n$ par 9 est 7.

2°) Soit $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$ des entiers naturels quelconques ($n$ étant un entier naturel).

On pose $\displaystyle A = \sum_{i=0}^{i=n} 4^{\alpha_i}$.

a) Entourer sans justifier la bonne réponse :

A est congru modulo 3 à :

$n$ $\qquad$ $n+1$ $\qquad$ $n-1$

Justification :

$4 \equiv 1 \pmod{3}$ donc $\forall i \in \{0;...;n\}$ $4^{\alpha_i} \equiv 1 \pmod{3}$.

On en déduit que $\displaystyle A \equiv \sum_{i=0}^{i=n} 1 \pmod{3}$ soit $A \equiv n+1 \pmod{3}$

b) Compléter l'équivalence suivante :

A est divisible par 3 $\Leftrightarrow$ $n$ est de la forme $3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
\text{A est divisible par 3} &\Leftrightarrow \text{A} \equiv 0 \pmod{3} \\
&\Leftrightarrow n+1 \equiv 0 \pmod{3} \\
&\Leftrightarrow n \equiv -1 \pmod{3} \\
&\Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{3} \\
&\Leftrightarrow n \text{ est de la forme } 3k+2 \text{ avec } k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$