

Contrôle du mardi 15 novembre 2016
(3 heures)



Prénom : Nom :

- Le barème est donné sur 40.
- On répondra directement sur la copie fournie avec le sujet.
- Il est demandé de ne rien écrire sur cet énoncé en dehors des réponses à donner (en particulier, on veillera à ne rien écrire sur les figures et le graphique).
- Une feuille annexe est jointe à l'énoncé pour la figure de l'exercice **IV** et le graphique de l'exercice **V**.

I. (5 points)

Cet exercice est un QCM composé de 5 questions indépendantes les unes des autres. Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte. Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fautive enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

- 1°) L'ensemble de définition de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$ est égal à :
- a. $]-\infty; -1] \cup]0; 1]$ b. $]0; 1]$ c. $[-1; 0[\cup]1; +\infty[$
- 2°) Pour tout réel $a > 0$, le nombre de solutions de l'équation $x^3 - ax = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est égal à :
- a. 1 b. 2 c. 3
- 3°) L'inégalité $1 \leq \sqrt{x} \leq 3$ est équivalente à :
- a. $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ b. $1 \leq x \leq 9$ c. $1 \leq x \leq 9$ ou $-9 \leq x \leq -1$
- 4°) Le minimum de la fonction $f: x \mapsto x^2 + 2mx + 4$ (m étant un réel fixé) sur \mathbb{R} est égal à :
- a. $-m$ b. $4 - m^2$ c. m
- 5°) Pour tout réel x différent de 1 et de -1 , le quotient $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$ est égal à :
- a. $\frac{2x+3}{x+1}$ b. $\frac{2x-3}{x+1}$ c. $\frac{2x-3}{x-1}$

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	
Réponse						

II. (8 points : 1°) 1 points ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) a) 1 point ; b) 2 points)

Dans tout l'exercice, on considère le polynôme $P(x) = x^2 + 3x - 4$.

1°) Compléter la phrase :

Les racines de $P(x)$ dans \mathbb{R} sont et (écrire uniquement les valeurs sans égalités)

2°) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : $x^4 + 3x^2 = 4$ (1) ; $|x^2 + 3x - 2| = 2$ (2).

Après résolution au brouillon, on complètera le tableau suivant donnant les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs de (1) et (2).

$S_1 = \dots\dots\dots$	$S_2 = \dots\dots\dots$
-------------------------	-------------------------

3°) a) Compléter le tableau ci-dessous donnant le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x (ne pas oublier les 0 !).

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $P(x)$		

b) On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel les variables x et y sont des réels.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $|x| \leq 2$
 Alors y prend la valeur $x^2 + 3x - 4$
 Sinon
 y prend la valeur $3 - x$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le résultat affiché en sortie est positif ou nul.

.....

(écrire l'ensemble sans égalité, en utilisant les notations adéquates)

III. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points ; 4°) 1 point)

On considère un triangle OAB isocèle en O avec $OA = OB = 1$. On note M le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAB.

On pose $AB = x$ avec $0 \leq x \leq 2$.

On pourra éventuellement admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

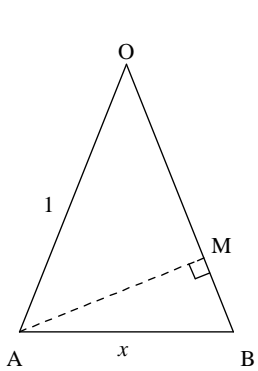


Figure 1

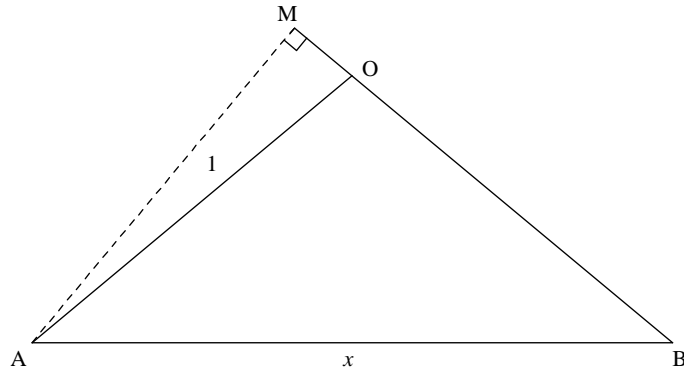


Figure 2

1°) Dans cette question, on suppose que $0 \leq x \leq \sqrt{2}$. On admet que dans ce cas, $M \in [OB]$ comme le montre la figure 1.

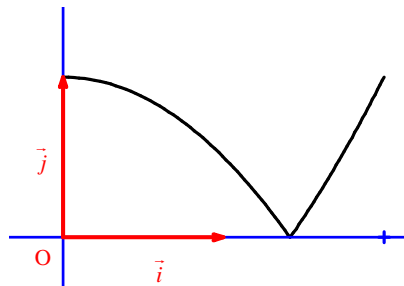
Démontrer que la distance $OM = \frac{2-x^2}{2}$.

On pourra utiliser le théorème de Pythagore dans les triangles OAM et ABM.

2°) On admet que pour $\sqrt{2} \leq x \leq 2$, $OM = \frac{x^2-2}{2}$ (dans ce cas, $M \notin [OB]$ comme le montre la figure 2).

On note f la fonction qui à tout réel $x \in [0; 2]$ associe la longueur OM.

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f .



Soit m un réel quelconque de l'intervalle $]0; 1[$.

- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ (E).
- Déterminer par le calcul les solutions de (E). On donnera uniquement les expressions en fonction de m après recherche au brouillon.

3°) Déterminer la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) on a : $OM = \frac{AB}{4}$.

4°) Proposer sans justifier une expression de $f(x)$ utilisant la valeur absolue.

IV. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 2 points)

Soit ABCD un parallélogramme. Soit a un réel fixé.

On note E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{AB}$. Soit I le milieu de [CF].

Compléter, en la codant, la figure donnée sur la feuille annexe pour $a = \frac{1}{3}$ (valeur uniquement pour la figure).

Pour les questions 1°) et 2°), on démarrera sèchement les calculs vectoriels en les présentant en colonnes. On donnera éventuellement quelques précisions entre parenthèses à droite de chaque égalité.

1°) Exprimer \overrightarrow{ED} en fonction de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{AD} (et de a).

2°) Exprimer \overrightarrow{BI} en fonction de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{AD} (et de a).

3°) Démontrer que les droites (DE) et (BI) sont parallèles. On attend une rédaction précise.

V. (12 points : 1°) 2 points + 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 1 point ; 6°) 2 points)

Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , A, B, C sont trois points tels que :

- (AB) a pour équation cartésienne $3x + 2y - 11 = 0$;
- (AC) passe par le point I(-5; 2) et admet le vecteur $\vec{u}(3; 1)$ pour vecteur directeur ;
- (BC) est parallèle à (OA) ;
- B a pour ordonnée 1.

1°) Déterminer une équation cartésienne de (AC) ; en déduire les coordonnées de A.

On attend la rédaction habituelle pour les équations cartésiennes de droites que l'on rappelle ci-dessous (modèle à recopier et compléter, ne rien écrire dans le cadre) :

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x; y)$.

$M \in (AC)$ si et seulement si $\overrightarrow{IM} \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$ et \vec{u} sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $\dots = 0$

si et seulement si $\dots = 0$

2°) Déterminer les coordonnées de B. On attend une rédaction courte et efficace.

3°) Déterminer les coordonnées de C.

4°) Démontrer que OACB est un parallélogramme. On attend une démonstration simple.

5°) Déterminer l'abscisse du point d'intersection E de (AB) et de l'axe des abscisses.

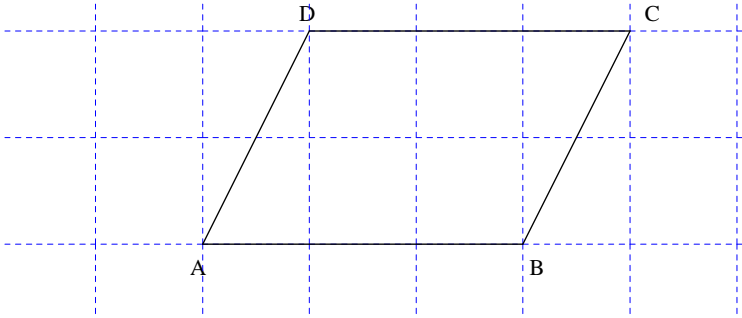
6°) Le but de cette question est de déterminer les coordonnées de I dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ du plan.

• À l'aide des coordonnées, exprimer \overrightarrow{AI} en fonction de \overrightarrow{AC} .

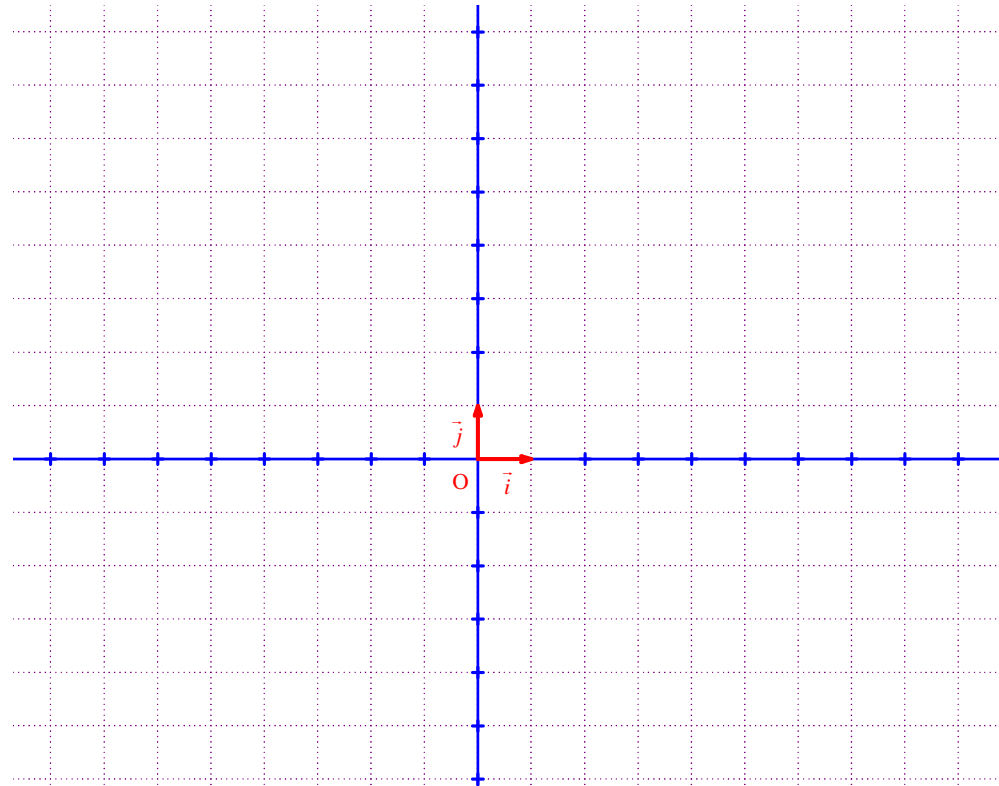
• Utiliser l'égalité obtenue pour déterminer les coordonnées de I dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Prénom : Nom :

Figure exercice IV :



Graphique exercice V :



V. (12 points : 1°) 2 points + 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 1 point ; 6°) 2 points)

1°)

.....

2°)

3°)

4°)

5°)

6°)

Corrigé du contrôle du 15-11-2016

I.

Cet exercice est un QCM composé de 5 questions indépendantes les unes des autres. Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte. Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) L'ensemble de définition de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$ est égal à :

- a. $]-\infty; -1] \cup]0; 1]$ b. $]0; 1]$ c. $[-1; 0[\cup]1; +\infty[$

$$f(x) \text{ existe si et seulement si } \begin{cases} \frac{1-x^2}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

On résout l'inéquation $\frac{1-x^2}{x} \geq 0$ grâce à un tableau de signes (signe de $1-x^2$ et signe de x ; on a les valeurs 1, -1 et 0 ; la valeur 0 est valeur interdite).

2°) Pour tout réel $a > 0$, le nombre de solutions de l'équation $x^3 - ax = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est égal à :

- a. 1 b. 2 c. 3

L'équation $x^3 - ax = 0$ est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned} x(x^2 - a) &= 0 \\ x(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) &= 0 \\ x = 0 \text{ ou } x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont 0, \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

3°) L'inégalité $1 \leq \sqrt{x} \leq 3$ est équivalente à :

- a. $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ b. $1 \leq x \leq 9$ c. $1 \leq x \leq 9$ ou $-9 \leq x \leq -1$

4°) Le minimum de la fonction $f: x \mapsto x^2 + 2mx + 4$ (m étant un réel fixé) sur \mathbb{R} est égal à :

- a. $-m$ b. $4 - m^2$ c. m

La fonction $f: x \mapsto x^2 + 2mx + 4$ est une fonction polynôme du second degré car son expression est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2m$ et $c = 4$. On note que $a \neq 0$.

Comme $a > 0$, f admet un minimum global sur \mathbb{R} atteint en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m}{2} = -m$.

Ce minimum est égal à $f(-m) = (-m)^2 + 2m \times (-m) + 4 = m^2 - 2m^2 + 4 = 4 - m^2$.

5°) Pour tout réel x différent de 1 et de -1, le quotient $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$ est égal à :

- a. $\frac{2x+3}{x+1}$ b. $\frac{2x-3}{x+1}$ c. $\frac{2x-3}{x-1}$

On doit commencer par factoriser le polynôme $2x^2 + x - 3$.

Les racines de ce polynôme sont 1 (racine évidente) et $-\frac{3}{2}$ (obtenue par produit).

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad 2x^2 + x - 3 = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x-1)(2x+3).$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \quad \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} &= \frac{\cancel{(x-1)}(2x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \\ &= \frac{2x+3}{x+1} \end{aligned}$$

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	
Réponse	a	c	b	b	a	

II.

Dans tout l'exercice, on considère le polynôme $P(x) = x^2 + 3x - 4$.

1°) Compléter la phrase :

Les racines de $P(x)$ dans \mathbb{R} sont -4 et 1 (écrire uniquement les valeurs sans égalités).

2°) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : $x^4 + 3x^2 = 4$ (1) ; $|x^2 + 3x - 2| = 2$ (2).

Après résolution au brouillon, on complètera le tableau suivant donnant les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs de (1) et (2).

$S_1 = \{1; -1\}$	$S_2 = \{0; 1; -3; -4\}$
-------------------	--------------------------

Résolution de (1) :

On pose $X = x^2$ (changement d'inconnue).

L'équation (1) s'écrit : $X^2 + 3X = 4$ qui est équivalente à $X^2 + 3X - 4 = 0$.

Les racines du polynôme $X^2 + 3X - 4$ sont -4 et 1 .

Or $X = x^2$.

Donc l'équation (1) est successivement équivalente à :

$$\underbrace{x^2 = -4}_{\text{impossible dans } \mathbb{R}} \text{ ou } x^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Donc l'ensemble des solutions de (1) est : $S_1 = \{1; -1\}$.

Résolution de (2) :

L'équation (2) est successivement équivalente à :

$$x^2 + 3x - 2 = 2 \text{ ou } x^2 + 3x - 2 = -2$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \text{ ou } x^2 + 3x = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \text{ ou } x(x+3) = 0$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -4 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = -3$$

Donc l'ensemble des solutions de (1) est : $S_2 = \{0; 1; -3; -4\}$.

3°) a) Compléter le tableau ci-dessous donnant le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x (ne pas oublier les 0 !).

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
Signe de $P(x)$	+	0	-	0	+

b) On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel les variables x et y sont des réels.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $|x| \leq 2$
 Alors y prend la valeur $x^2 + 3x - 4$
 Sinon
 y prend la valeur $3 - x$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le résultat affiché en sortie est positif ou nul.

.....

(écrire l'ensemble sans égalité, en utilisant les notations adéquates)

La condition $|x| \leq 2$ équivaut à $-2 \leq x \leq 2$.

La condition $|x| > 2$ équivaut à $x < -2$ ou $x > 2$.

On résout donc les systèmes (I) $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$ et (II) $\begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 2 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases}$

(I) est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \leq -4 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

$1 \leq x \leq 2$

(II) est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

$x < -2 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3$

Les réels x cherchés sont les réels vérifiant $x < -2$ ou $1 \leq x \leq 3$.

III.

On considère un triangle OAB isocèle en O avec $OA = OB = 1$. On note M le pied de la hauteur issue de A dans le triangle OAB.

On pose $AB = x$ avec $0 \leq x \leq 2$.

On pourra éventuellement admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

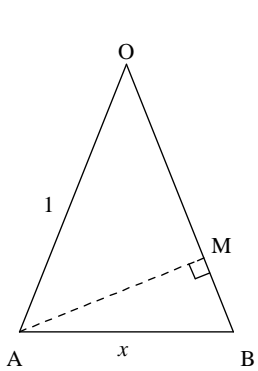


Figure 1

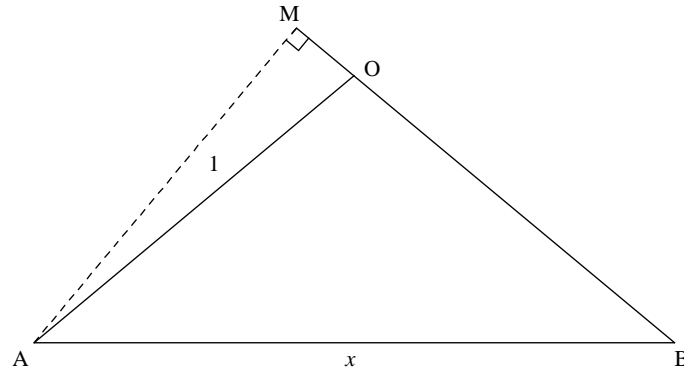


Figure 2

1°) Dans cette question, on suppose que $0 \leq x \leq \sqrt{2}$. On admet que dans ce cas, $M \in [OB]$ comme le montre la figure 1.

Démontrer que la distance $OM = \frac{2-x^2}{2}$.

On pourra utiliser le théorème de Pythagore dans les triangles OAM et ABM.

Cette question a été très mal réussie par l'ensemble des élèves. Il y en a très peu qui l'ont réussie.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OAM, on a :

$$OA^2 = OM^2 + AM^2 \text{ ce qui permet d'écrire } OM^2 + AM^2 = 1 \quad (1) \text{ (puisque } OA = 1 \text{ par hypothèse).}$$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABM, on a :

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 \text{ ce qui permet d'écrire } AM^2 = x^2 - BM^2 \quad (2) \text{ (puisque } AB = x \text{ par hypothèse).}$$

Compte tenu de (2), (1) donne alors $OM^2 + x^2 - BM^2 = 1 \quad (3)$.

Or $M \in [OB]$, donc $BM = OB - OM$ soit $BM = 1 - OM$.

(3) donne alors $OM^2 + x^2 - (1 - OM)^2 = 1$.

Cette dernière égalité donne ensuite successivement :

$$OM^2 + x^2 - (1 + OM^2 - 2OM) = 1$$

$$x^2 - 1 + 2 \times OM = 1$$

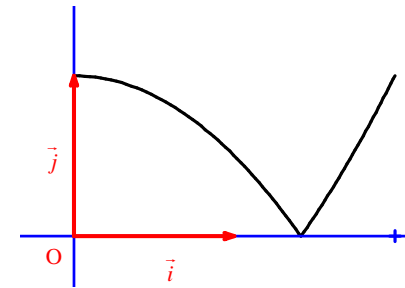
$$2 \times OM = 2 - x^2$$

On en déduit que $OM = \frac{2-x^2}{2}$.

2°) On admet que pour $\sqrt{2} \leq x \leq 2$, $OM = \frac{x^2-2}{2}$ (dans ce cas, $M \notin [OB]$ comme le montre la figure 2).

On note f la fonction qui à tout réel $x \in [0; 2]$ associe la longueur OM.

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f .



Soit m un réel quelconque de l'intervalle $]0; 1]$.

• Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m \quad (E)$.

$$m \in]0; 1]$$

On cherche le nombre de points d'intersection de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = m$.

On observe qu'il y a deux points d'intersection.

L'équation (E) admet donc deux solutions dans l'intervalle $[0; 2]$.

• Déterminer par le calcul les solutions de (E). On donnera uniquement les expressions en fonction de m après recherche au brouillon.

L'équation (E) est successivement équivalente à :

$$\begin{cases} \frac{2-x^2}{2} = m \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{x^2-2}{2} = m \\ \sqrt{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2 - 2m \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 = 2 + 2m \\ \sqrt{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2-2m} & \text{ou } x = -\sqrt{2-2m} \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \sqrt{2m+2} & \text{ou } x = -\sqrt{2m+2} \\ \sqrt{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$x = \sqrt{2-2m} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{2m+2}$$

Il faut justifier pourquoi on ne retient que ces deux expressions.

On exclut $-\sqrt{2-2m}$ et $-\sqrt{2m+2}$ qui donnent un résultat négatif.

Comme $m \in]0; 1]$, $0 \leq 2-2m < 2$ d'où $0 \leq \sqrt{2-2m} < \sqrt{2}$.

Comme $m \in]0; 1]$, $2 < 2+2m \leq 4$ d'où $\sqrt{2} < \sqrt{2+2m} \leq 2$.

3°) Déterminer la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) on a : $OM = \frac{AB}{4}$.

$$\text{L'égalité } OM = \frac{AB}{4} \text{ est équivalente à } \begin{cases} \frac{2-x^2}{2} = \frac{x}{4} & (1) \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{x^2-2}{2} = \frac{x}{4} & (2) \\ \sqrt{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

(1) est successivement équivalente à :

$$2(2-x^2) = x$$

$$4-2x^2 = x$$

$$2x^2+x-4=0 \quad (\Delta_1 = 33)$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4}$$

Avec la calculatrice, on vérifie que :

$$\frac{-1+\sqrt{33}}{4} \in [0; \sqrt{2}] ; \quad \frac{-1-\sqrt{33}}{4} \notin [0; \sqrt{2}] ; \quad \frac{1+\sqrt{33}}{4} \in [\sqrt{2}; 2] ; \quad \frac{1-\sqrt{33}}{4} \notin [\sqrt{2}; 2].$$

Donc les valeurs de x qui répondent au problème sont $\frac{\sqrt{33}-1}{4}$ et $\frac{\sqrt{33}+1}{4}$.

4°) Proposer sans justifier une expression de $f(x)$ utilisant la valeur absolue.

$$f(x) = \frac{|x^2-2|}{2}$$

IV.

Soit ABCD un parallélogramme. Soit a un réel fixé.

On note E et F les points définis par $\overline{AE} = a\overline{BA}$ et $\overline{BF} = a\overline{AB}$. Soit I le milieu de [CF].

Compléter en codant la figure donnée sur la feuille annexe pour $a = \frac{1}{3}$ (valeur uniquement pour la figure).

Pour les questions 1°) et 2°), on démarrera sèchement les calculs vectoriels en les présentant en colonnes. On donnera éventuellement quelques précisions entre parenthèses à droite de chaque égalité.

On doit impérativement coder la figure pour marquer que I est le milieu de [CF].

Du coup, on doit aussi tracer le segment [CF] (ce que certains élèves ont oublié de faire).

1°) Exprimer \overline{ED} en fonction de \overline{AB} et de \overline{AD} (et de a).

On attend une égalité de la forme $\overline{ED} = \dots \overline{AB} + \dots \overline{AD}$.

On doit exprimer \overline{ED} comme combinaison linéaire des vecteurs \overline{AB} et de \overline{AD} (et vraiment ces vecteurs-là, et non \overline{BA} ou \overline{DA}).

$$\overline{ED} = \overline{EA} + \overline{AD} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$= a\overline{AB} + \overline{AD}$$

2°) Exprimer \overline{BI} en fonction de \overline{AB} et de \overline{AD} (et de a).

$$\overline{BI} = \overline{BF} + \overline{FI} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$= \overline{BF} + \frac{1}{2}\overline{FC} \quad (\text{car I est le milieu de [CF]}).$$

$$= \overline{BF} + \frac{1}{2}(\overline{BC} - \overline{BF})$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BF} + \frac{1}{2}\overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BF} + \frac{1}{2}\overline{AD} \quad (\text{car comme ABCD est un parallélogramme, on a : } \overline{AD} = \overline{BC})$$

$$= \frac{1}{2}(a\overline{AB}) + \frac{1}{2}\overline{AD}$$

$$= \frac{a}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$$

3°) Démontrer que les droites (DE) et (BI) sont parallèles. On attend une rédaction précise.

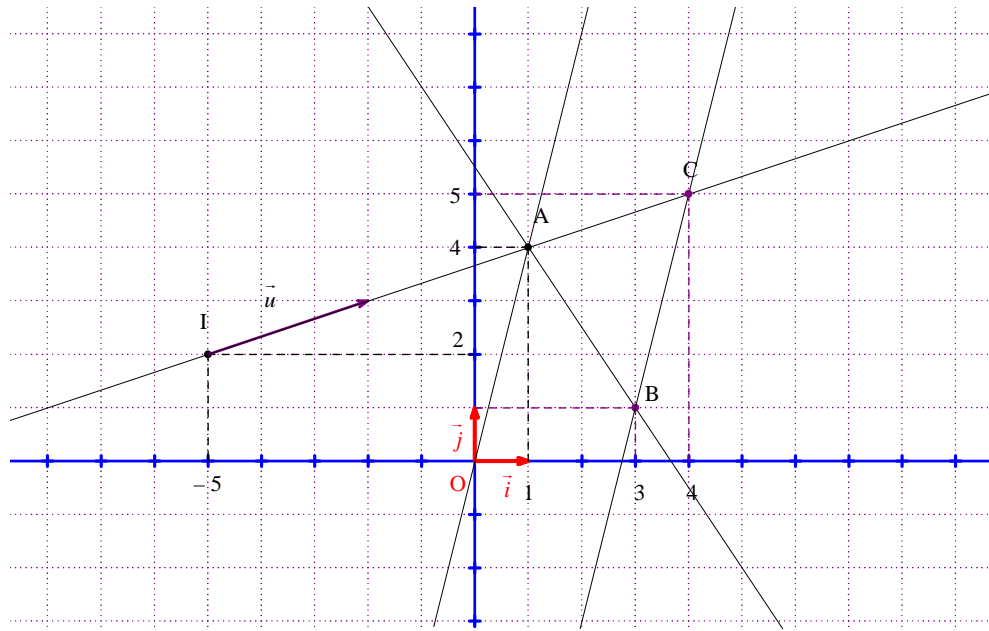
On observe que $\vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{ED}$. Donc les vecteurs \vec{BI} et \vec{ED} sont colinéaires.

On en déduit que (DE) // (BI).

V.

Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , A, B, C sont trois points tels que :

- (AB) a pour équation cartésienne $3x + 2y - 11 = 0$;
- (AC) passe par le point I(-5 ; 2) et admet le vecteur $\vec{u}(3;1)$ pour vecteur directeur ;
- (BC) est parallèle à (OA) ;
- B a pour ordonnée 1.



On commence tout de suite par faire un graphique (il n'y a pas besoin d'avoir déterminé les coordonnées des points A, B, C pour le faire).

Pour tracer la droite d'équation cartésienne $3x + 2y - 11 = 0$, on cherche deux points à coordonnées entières de cette droite. Par exemple, les points de coordonnées $(5; -2)$ et $(-3; 5)$ appartiennent à cette droite.

On trace très facilement la droite (AC) grâce au point I et au vecteur \vec{u} .

1°) Déterminer une équation cartésienne de (AC) ; en déduire les coordonnées de A.

On attend la rédaction habituelle pour les équations cartésiennes de droites que l'on rappelle ci-dessous (modèle à recopier et compléter, ne rien écrire dans le cadre) :

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x; y)$.

$M \in (AC)$ si et seulement si $\vec{IM} \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$ et \vec{u} sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si = 0

si et seulement si = 0

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x; y)$.

$M \in (AC)$ si et seulement si $\vec{IM} \begin{vmatrix} x+5 & \\ y-2 & \end{vmatrix}$ et \vec{u} sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x+5 & 3 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $x + 5 - 3y + 6 = 0$

si et seulement si $x - 3y + 11 = 0$

Les coordonnées sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x - 3y + 11 = 0 & \times 2 & \times (-3) \\ 3x + 2y - 11 = 0 & \times 3 & \times 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x - 11 = 0 \\ 11y - 44 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Donc A a pour coordonnées $(1; 4)$.

On vérifie ce résultat graphiquement.

2°) Déterminer les coordonnées de B. On attend une rédaction courte et efficace.

On sait que $y_B = 1$.

On a : $3x_B + 2 \times y_B - 11 = 0$ ce qui donne $3x_B + 2 \times 1 - 11 = 0$ d'où $x_B = 3$.

Donc B a pour coordonnées $(3; 1)$.

3°) Déterminer les coordonnées de C.

On cherche une équation cartésienne de la droite (BC), droite parallèle à (OA) passant par B.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x; y)$.

$M \in (BC)$ si et seulement si $\overline{BM} \begin{vmatrix} x-3 \\ y-1 \end{vmatrix}$ et \overline{OA} sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ y-1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $4(x-3) - (y-1) = 0$

si et seulement si $4x - y - 11 = 0$

Les coordonnées de C sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x-3y+11=0 \\ 4x-y-11=0 \end{cases} \begin{array}{l} \times(-1) \\ \times 3 \end{array} \begin{array}{l} \times(-4) \\ \times 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 11x-44=0 \\ 11y-55=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$$

Donc C a pour coordonnées $(4; 5)$.

4°) Démontrer que OACB est un parallélogramme. On attend une démonstration simple.

$$\overline{OA} \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix} \quad \overline{BC} \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

On constate que $\overline{OA} = \overline{BC}$.

Par suite, OACB est un parallélogramme.

On peut aussi utiliser les vecteur \overline{OB} et \overline{AC} .

5°) Déterminer l'abscisse du point d'intersection E de (AB) et de l'axe des abscisses.

On a : $3x_E + 2y_E - 11 = 0$.

Or $y_E = 0$. Par suite, $3x_E + 2 \times 0 - 11 = 0$. Donc $x_E = \frac{11}{3}$.

On vérifie ce résultat sur le graphique.

6°) Le but de cette question est de déterminer les coordonnées de I dans le repère $(O, \overline{OA}, \overline{OB})$ du plan.

- À l'aide des coordonnées, exprimer \overline{AI} en fonction de \overline{AC} .
- Utiliser l'égalité obtenue pour déterminer les coordonnées de I dans le repère $(O, \overline{OA}, \overline{OB})$.

$$\overline{AI} \begin{vmatrix} -5-1 \\ 1-4 \end{vmatrix} = -6 \quad \overline{AC} \begin{vmatrix} 4-1 \\ 5-4 \end{vmatrix} = 3$$

Donc $\overline{AI} = -2\overline{AC}$.

Comme on a démontré que OACB est un parallélogramme, $\overline{AC} = \overline{OB}$.

Par conséquent, $\overline{AI} = -2\overline{OB}$.

Cette dernière égalité donne $\overline{OI} - \overline{OA} = -2\overline{OB}$ d'où $\overline{OI} = \overline{OA} - 2\overline{OB}$.

Cette égalité permet d'affirmer que I a pour coordonnées $(1; -2)$ dans le repère $(O, \overline{OA}, \overline{OB})$.

On vérifie aisément ce résultat graphiquement.