TS1

Contrôle du vendredi 18 novembre 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note :** …….. **/ 20**

I. (3 points)

Simplifier l'écriture de chacun des nombres ci-dessous où x désigne un nombre réel.
Écrire chaque résultat avec une seule exponentielle. On ne donnera qu'un seul résultat à chaque fois.

$A=\dfrac{\left(e^{x}\right)^{5}\times e^{x+3}}{e^{2x-1}}$; $B=\dfrac{\sqrt{e}\times e^{2x-5}}{\left(e^{3-x}\right)^{3}}$; $C=\left(e^{3}\right)^{x}+\dfrac{1}{e^{-3x}}$.

A = ……………… ; B = ……………… ; C = ……………….

II. (8 points : 2 points pour chaque équation ou inéquation)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$e^{\frac{4+x}{3}}\times\dfrac{1}{e}=1 \quad (1)$; $\left|\dfrac{1}{e^{x}-1}+1\right|=2 \quad (2)$; $e^{\frac{x+1}{x-1}}\geqslant\dfrac{1}{e} \quad (3)$; $e^{x+\frac{2}{x}}\geqslant e^{3} \quad (4)$.

Donner directement sans explication les ensembles de solutions respectifs S_1, S_2, S_3, S_4 de ces équations et inéquations.

$S_1=$ …………………………	$S_2=$ …………………………	$S_3=$ …………………………	$S_4=$ …………………………

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)^{2}\,e^{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=$ …………………………………………………… (un seul résultat sous forme factorisée au maximum)

2°) Compléter le tableau suivant afin de déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ (ne pas oublier d'écrire les 0).
Compléter la dernière ligne avec les extremums de f en valeur exacte.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de	
Signe de	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

Faire des phrases pour décrire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

……

……

……

3°) Démontrer que la fonction $F : x \mapsto \left(x^{2}-4x+5\right)e^{x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Il est demandé de présenter toutes les étapes de calcul.
On présentera les calculs en colonne et on pensera à écrire « $\forall x\in\mathbb{R}$ » sur la première ligne.

……

……

……

……

……

……

……

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

À tout réel m on fait correspondre la fonction $f_m : x \mapsto \left(x^2 - m\right)\text{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_m'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_m'(x) =$ .... (un seul résultat)

2°) Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels la fonction f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3°) Déterminer une équation de la tangente T_m à $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0.
On attend une rédaction la plus simple et la plus soignée possible.

....

....

....

....

V. (1 point)

Soit F une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+\text{e}^x}}$ sur $\mathbb{R}$. On ne cherchera pas l'expression de F.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{G}(x) = \text{F}(2x)$.

Calculer $\text{G}'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ .... (une seule égalité)

Corrigé du contrôle du 18-11-2016

I.

Simplifier l'écriture de chacun des nombres ci-dessous où x désigne un nombre réel.
Écrire chaque résultat avec une seule exponentielle. On ne donnera qu'un seul résultat à chaque fois.

$A=\dfrac{\left(e^{x}\right)^{5}\times e^{x+3}}{e^{2x-1}}$; $B=\dfrac{\sqrt{e}\times e^{2x-5}}{\left(e^{3-x}\right)^{3}}$; $C=\left(e^{3}\right)^{x}+\dfrac{1}{e^{-3x}}$.

$A=e^{4x+4}$; $B=e^{5x-\frac{27}{2}}$; $C=2e^{3x}$.

$$A=\frac{\left(e^{x}\right)^{5}\times e^{x+3}}{e^{2x-1}}=\frac{e^{5x}\times e^{x+3}}{e^{2x-1}}=\frac{e^{6x+3}}{e^{2x-1}}=e^{6x+3-2x+1}=e^{4x+4}$$

$$B=\frac{\sqrt{e}\times e^{2x-5}}{\left(e^{3-x}\right)^{3}}=\frac{\sqrt{e^{1}}\times e^{2x-5}}{\left(e^{3-x}\right)^{3}}=\frac{e^{\frac{1}{2}}\times e^{2x-5}}{e^{9-3x}}=\frac{e^{2x-\frac{9}{2}}}{e^{9-3x}}=e^{5x-\frac{27}{2}}$$

$$C=\left(e^{3}\right)^{x}+\frac{1}{e^{-3x}}=e^{3x}+e^{3x}=2e^{3x}$$

II.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$e^{\frac{4+x}{3}}\times\dfrac{1}{e}=1$ (1) ; $\left|\dfrac{1}{e^{x}-1}+1\right|=2$ (2) ; $e^{\frac{x+1}{x-1}}\geqslant\dfrac{1}{e}$ (3) ; $e^{x+\frac{2}{x}}\geqslant e^{3}$ (4).

Donner directement sans explication les ensembles de solutions respectifs S_1, S_2, S_3, S_4 de ces équations et inéquations.

$S_1=\{-1\}$	$S_2=\left\{\ln 2\,;\ln\dfrac{2}{3}\right\}$	$S_3=]-\infty\,;0]\cup]1\,;+\infty[$	$S_4=]0\,;1]\cup[2\,;+\infty[$

$(1)\Leftrightarrow e^{\frac{4+x}{3}}\times e^{-1}=1$
$\Leftrightarrow e^{\frac{4+x}{3}-1}=e^{0}$
$\Leftrightarrow \dfrac{4+x}{3}-1=0$
$\Leftrightarrow \dfrac{4+x}{3}=1$
$\Leftrightarrow 4+x=3$
$\Leftrightarrow x=-1$

$(2)\Leftrightarrow \left|\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}\right|=2$
$\Leftrightarrow \dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=2$ ou $\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}=-2$
$\Leftrightarrow e^{x}=2$ ou $e^{x}=\dfrac{2}{3}$
$\Leftrightarrow x=\ln 2$ ou $x=\ln\dfrac{2}{3}$

$(3)\Leftrightarrow e^{\frac{x+1}{x-1}}\geqslant e^{-1}$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}\geqslant -1$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1}+1\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-1}\geqslant 0$
$\Leftrightarrow x\leqslant 0$ ou $x>1$ (après avoir fait éventuellement un tableau de signes)

$(4)\Leftrightarrow x+\dfrac{2}{x}\geqslant 3$
$\Leftrightarrow x+\dfrac{2}{x}-3\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x}\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{x}\geqslant 0$
$\Leftrightarrow 0<x\leqslant 1$ ou $x\geqslant 2$ (après avoir dressé un tableau de signes)

On cherche les racines du polynôme x^2-3x+2. On trouve 1 et 2 (racines évidentes ou utilisation du discriminant).

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)^2 \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \left(x^2-1\right)\mathrm{e}^x \text{ (un seul résultat sous forme factorisée au maximum)}$$

ou

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = (x-1)(x+1)\mathrm{e}^x \text{ (un seul résultat sous forme factorisée au maximum)}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2 \times 1 \times (x-1) \times \mathrm{e}^x + (x-1)^2 \times \mathrm{e}^x$ (attention, il y a une « sous-dérivée »)

$$= 2(x-1) \times \mathrm{e}^x + (x-1)^2 \times \mathrm{e}^x$$

$$= 2(x-1)\mathrm{e}^x + (x-1)^2 \mathrm{e}^x$$

$$= (x-1)\mathrm{e}^x \left[2 + (x-1)\right]$$

$$= (x-1)(x+1)\mathrm{e}^x$$

Autre possibilité beaucoup moins bonne :

On commence par écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^x$.

On utilise la formule de dérivée d'un produit $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x + \left(x^2-2x+1\right)\mathrm{e}^x$ puis on continue en factorisant.

2°) Compléter le tableau suivant afin de déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ (ne pas oublier d'écrire les 0).

Compléter la dernière ligne avec les extremums de f en valeur exacte.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de e^x		+		+		+	
Signe de x^2-1		+	0	–	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f		↗	$\frac{4}{\mathrm{e}}$	↘	0	↗	

Faire des phrases pour décrire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty\,; -1]$ et $[1\,; +\infty[$.

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\,; 1]$.

3°) Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \left(x^2 - 4x + 5\right)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Il est demandé de présenter toutes les étapes de calcul.
On présentera les calculs en colonne et on pensera à écrire « $\forall x \in \mathbb{R}$ » sur la première ligne.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = (2x-4)\mathrm{e}^x + \left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x$

$$= \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^x$$

$$= (x-1)^2 \mathrm{e}^x$$

$$= f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

IV.

À tout réel m on fait correspondre la fonction $f_m : x \mapsto \left(x^2 - m\right)\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_m'(x)$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m'(x) = \left(x^2 + 2x - m\right)\mathrm{e}^x \text{ (un seul résultat)}$$

2°) Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels la fonction f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x > 0$, le signe de $f_m'(x)$ est le même que celui de $x^2 + 2x - m$.

$x^2 + 2x - m$ est un polynôme du second degré. Son discriminant réduit est égal à $\Delta' = 1 + m$.

On distingue 3 cas.

1er cas : $m > -1$

Dans ce cas, $\Delta' > 0$. Le polynôme $x^2 + 2x - m$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$, avec $x_1 < x_2$.
Le coefficient de x^2 est strictement positif.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f_m'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f_m		↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	

f_m est strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;x_1\right]$ et $\left[x_2\,;+\infty\right[$.
f_m est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[x_1\,;x_2\right]$.

2^{e} cas : $m=-1$

Dans ce cas, $\forall x\in\mathbb{R}\quad f_{-1}'(x)=\left(x^2+2x+1\right)\text{e}^x$ soit $\forall x\in\mathbb{R}\quad f_{-1}'(x)=(x+1)^2\,\text{e}^x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f_{-1}'(x)$		+	0	+	
Variations de f_{-1}		↗		↗	

f_{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3^{e} cas : $m<-1$

Dans ce cas, $\Delta'<0$. Le polynôme x^2+2x-m n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Comme le coefficient de x^2 est strictement positif, le polynôme est toujours strictement positif sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f_m'(x)$		+	
Variations de f_m		↗	

f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion :

La fonction f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement $m\leqslant-1$.

3°) Déterminer une équation de la tangente T_m à $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse 0.
On attend une rédaction la plus simple et la plus soignée possible.

On a $f_m(0)=-m$ et $f_m'(0)=-m$ donc T_m a pour équation $y=-mx-m$.

V.

Soit F une primitive de la fonction $f : x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{1+\text{e}^x}}$ sur $\mathbb{R}$. On ne cherchera pas l'expression de F.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{G}(x)=\text{F}(2x)$.

Calculer $\text{G}'(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \text{G}'(x)=\frac{4x}{\sqrt{1+\text{e}^{2x}}}\quad \text{(une seule égalité)}$$

On sait que F est une primitive de la fonction $f : x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{1+\text{e}^x}}$ sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad \text{F}'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+\text{e}^x}}$.

On applique la formule de dérivation d'une composée de deux fonctions.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \text{G}'(x)=2\times\text{F}'(2x)$$

$$=2\times\frac{2x}{\sqrt{1+\text{e}^{2x}}}$$

$$=\frac{4x}{\sqrt{1+\text{e}^{2x}}}$$

On utilise la formule de dérivation d'une composée : $(v\circ u)'(x)=u'(x)\times v'\left[u(x)\right]$.

La fonction G est la composée de la fonction $u : x\mapsto 2x$ suivie de la fonction F. Autrement dit, $\text{G}=\text{F}\circ u$.
La dérivée de la fonction u est la fonction $x\mapsto 2$.