TS1

Contrôle du mardi 8 novembre 2016 (3 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	
Réponse					

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\,;1\}$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$ pour tout entier naturel *n*. On admettra que pour tout entier naturel *n*, $z_n \neq 0$ et $z_n \neq 1$.

1°) Dans cette question, on prend $z_0 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$. Calculer z_3. On donnera sans justifier le résultat sous forme algébrique.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $z_{n+3} = \overline{z_n}$. On démontrera ce résultat sans procéder par récurrence.
En déduire, sans calcul, une relation entre z_n et z_{n+6}.

3°) On suppose que $z_0 = 3 - \mathrm{i}$. Déterminer z_{2019}. On justifiera brièvement après avoir effectué la recherche au brouillon.

4°) Déterminer z_0 tel que $z_1 = \overline{z_0}$. On rédigera proprement sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

II. (4 points)

Cet exercice est un QCM composé de 4 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto x \sin x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

a. $\mathrm{F} : x \mapsto -\dfrac{x^2 \cos x}{2}$ b. $\mathrm{F} : x \mapsto x \cos x - \sin x$ c. $\mathrm{F} : x \mapsto \sin x - x \cos x$

2°) Le nombre de solutions de l'équation $x^3 (x-1)^2 = 10^{-2}$ dans l'intervalle $[-1\,; 2]$ est égal à :

a. 1 b. 2 c. 3

3°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$ est donnée par :

a. $\dfrac{2 \sin\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x^2}$ b. $\dfrac{2 \cos\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x^2}$ c. $-\dfrac{2 \cos\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x^2}$

4°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \left(1-\sqrt{x}\right)^n$ (*n* entier naturel supérieur ou égal à 1) est donnée par :

a. $-\dfrac{n\left(1-\sqrt{x}\right)^{n-1}}{2\sqrt{x}}$ b. $n\left(1-\sqrt{x}\right)^{n-1}$ c. $\dfrac{n\left(1-\sqrt{x}\right)^{n-1}}{2\sqrt{x}}$

III. (4 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

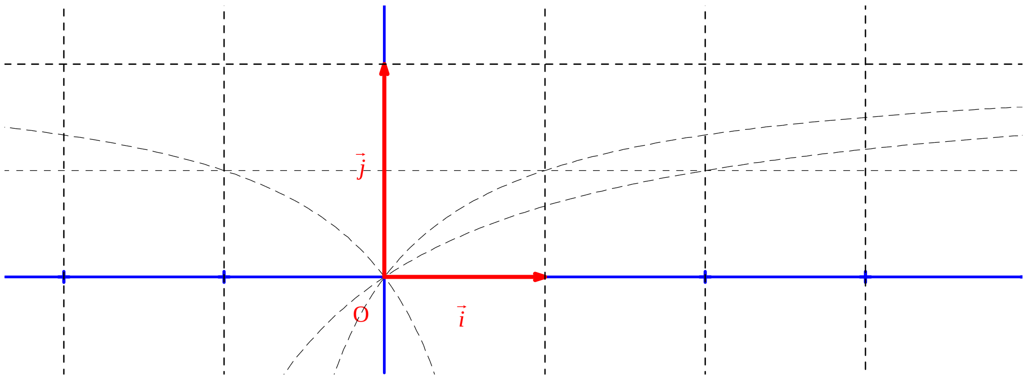
1°) Le but de cette question est de résoudre par le calcul l'équation $x + \mathrm{E}(x) = 0 \quad (1)$.

a) Démontrer que si *x* est solution de l'équation (1), alors *x* est un entier relatif.

b) En déduire la (ou les) solution(s) de l'équation (1).

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x + \mathrm{E}(x)}$. Quel est son ensemble de définition ?

2°) Sur le graphique ci-dessous, on donne en pointillés les courbes d'équations $y = \dfrac{x}{x-1}$, $y = \dfrac{x}{x+1}$ et $y = \dfrac{x}{x+2}$.



Tracer avec soin et précision la représentation graphique de la fonction f pour $x \in [-1\,; 0[\cup]0\,; 3]$.

3°) Recopier et compléter sans justifier la phrase suivante en utilisant les notations mathématiques adaptées :

« Lorsque $x \in [-1\,; 0[\cup]0\,; 3]$, $f(x)$ décrit ……………………………………….. . »

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel. On ne demande pas de le programmer sur la calculatrice.

Entrée :
Saisir n (entier naturel supérieur ou égal à 2)

Initialisation :
U prend la valeur 1

Traitement :
Pour k allant de 1 à $n-1$ **Faire**
    A prend la valeur $\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}$
    U prend la valeur $\text{A}\times\text{U}$
FinPour

Sortie :
Afficher U

Faire fonctionner l'algorithme « à la main » lorsque la valeur de n saisie en entrée est 6.
Écrire uniquement la valeur de U affichée en sortie (valeur exacte).

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1=1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)u_n$ pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

a) Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $v_n=\frac{(n-1)!}{n}u_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a $v_{n+1}=v_n$.
On n'utilisera pas de récurrence.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a $u_n=\frac{n}{(n-1)!}$.

V. (4 points)

Au brouillon, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(\mathrm{e}^x+1)^2=4\mathrm{e}^x$ (1) ; $\left(\sqrt{\mathrm{e}^x}-1\right)^2=9$ (2) ; $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^x}=4$ (3) ; $\frac{5}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}=2$ (4).

Compléter le tableau ci-dessous où S_1, S_2, S_3, S_4 désignent les ensembles de solutions respectifs des équations (1), (2), (3), (4).
Rédiger la résolution des équations sur les lignes ci-contre.

$S_1=$	$S_2=$	$S_3=$	$S_4=$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Prénom et nom : ………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) ……………. (une seule égalité sans justifier)

2°)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) ………

……

……………………………………………………………………………… ……………………………………

……

4°) ………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) a) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

b) ……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

L'ensemble de définition de f est ………….. .

2°) Fait sur le graphique.

3°) ……………………………………………………………………………………………………

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) …………………….. (un seul résultat sans égalité)

2°) a) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

b) ……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

Corrigé du contrôle du 8-11-2016

I.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\,;1\}$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{\overline{z_n}}$ pour tout entier naturel *n*. On admettra que pour tout entier naturel *n*, $z_n \neq 0$ et $z_n \neq 1$.

1°) Dans cette question, on prend $z_0 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$. Calculer z_3. On donnera sans justifier le résultat sous forme algébrique.

$$z_3 = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$$

2°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $z_{n+3} = \overline{z_n}$. On démontrera ce résultat sans procéder par récurrence.
En déduire, sans calcul, une relation entre z_n et z_{n+6}.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+2} = 1 - \frac{1}{\overline{z_{n+1}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\overline{1 - \frac{1}{\overline{z_n}}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{z_n}}$$

$$= 1 - \frac{z_n}{z_n - 1}$$

$$= -\frac{1}{z_n - 1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+3} = 1 - \frac{1}{\overline{z_{n+2}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\overline{-\frac{1}{z_n - 1}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\overline{-\frac{1}{z_n - 1}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\overline{z_n} - 1}}$$

$$= 1 + \overline{z_n} - 1$$

$$= \overline{z_n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+6} = \overline{z_{n+3}}$$

$$= \overline{\overline{z_n}}$$

$$= z_n$$

3°) On suppose que $z_0 = 3 - \mathrm{i}$. Déterminer z_{2019}. On justifiera brièvement après avoir effectué la recherche au brouillon.

D'après la question précédente, la suite (z_n) est périodique de période 6.

On écrit d'abord : $z_{2019} = z_{2016+3}$ donc $z_{2019} = \overline{z_{2016}}$.

Or $2016 = 6 \times 336$ donc $z_{2016} = z_0$ d'où $z_{2019} = \overline{z_0} = 3 + \mathrm{i}$.

4°) Déterminer z_0 tel que $z_1 = \overline{z_0}$.
On rédigera proprement sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

On cherche z_0 tel que $z_1 = \overline{z_0}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\overline{z_0}} = \overline{z_0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\overline{z_0}\right)^2 - \overline{z_0} + 1 = 0$$

Considérons le polynôme $Z^2 - Z + 1$ de variable $Z \in \mathbb{C}$.

Son discriminant est égal à – 3. Il admet donc deux racines distinctes conjuguées dans $\mathbb{C}$.

$Z_1 = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

Donc

$$(1) \Leftrightarrow \overline{z_0} = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \overline{z_0} = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z_0 = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z_0 = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

II.

Cet exercice est un QCM composé de 4 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau ci-contre avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto x \sin x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

a. $\mathrm{F} : x \mapsto -\dfrac{x^2 \cos x}{2}$ b. $\mathrm{F} : x \mapsto x \cos x - \sin x$ c. $\mathrm{F} : x \mapsto \sin x - x \cos x$

2°) Le nombre de solutions de l'équation $x^3 (x-1)^2 = 10^{-2}$ dans l'intervalle $[-1 ; 2]$ est égal à :

a. 1 b. 2 c. 3

3°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$ est donnée par :

a. $\dfrac{2 \sin\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2}$ b. $\dfrac{2 \cos\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2}$ c. $-\dfrac{2 \cos\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2}$

4°) La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \left(1 - \sqrt{x}\right)^n$ (n entier naturel supérieur ou égal à 1) est donnée par :

a. $-\dfrac{n\left(1 - \sqrt{x}\right)^{n-1}}{2\sqrt{x}}$ b. $n\left(1 - \sqrt{x}\right)^{n-1}$ c. $\dfrac{n\left(1 - \sqrt{x}\right)^{n-1}}{2\sqrt{x}}$

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	
Réponse	c	c	c	a	

Finalement, aucun point n'a été retiré en cas de réponse fausse afin de ne pas trop pénaliser les élèves.

Calculs détaillés :

1°) On prend la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \sin x - x \cos x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) = \cos x - \left(1 \times \cos x + x \times (-\sin x)\right)$$

$$= \cos x - (\cos x - x \sin x)$$

$$= x \sin x$$

$$= f(x)$$

Attention (piège), la dérivée de la fonction $x \mapsto -\dfrac{x^2 \cos x}{2}$ n'est pas la fonction $x \mapsto x \sin x$ car la dérivée d'un produit n'est pas égale à au produit des dérivées.

2°)

1ère méthode :

On étudie les variations de la fonction $x \mapsto x^3 (x-1)^2$.

On dresse le tableau de variations puis on utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

2e méthode :

L'équation $x^3 (x-1)^2 = 10^{-2}$ est équivalente à $x^3 \left(x^2 - 2x + 1\right) = 10^{-2}$ soit $x^5 - 2x^4 + x^3 - 10^{-2} = 0$.
On utilise l'application de résolution polynomiale de la calculatrice.
On obtient trois solutions réelles qui sont toutes dans l'intervalle $[-1 ; 2]$:

$x_1 = 0{,}264381907...$ $x_2 = 0{,}878566666...$ $x_3 = 1{,}08810377...$

Il y a deux autres solutions complexes.

3°) Pour calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$, on applique la formule de dérivée d'une composée.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{2}{x^2} \times \cos\left(1 + \frac{2}{x}\right) = -\frac{2 \cos\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^2}$$

4°) Pour calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \left(1 - \sqrt{x}\right)^n$ (n entier naturel supérieur ou égal à 1), on utilise la formule de dérivation $\left(u^n\right)' = n u' u^{n-1}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = n \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times \left(1 - \sqrt{x}\right)^{n-1} = -\frac{n\left(1 - \sqrt{x}\right)^{n-1}}{2\sqrt{x}}$$

III.

1°) Le but de cette question est de résoudre par le calcul l'équation $x+\mathrm{E}(x)=0 \quad (1)$.

a) Démontrer que si x est solution de l'équation (1), alors x est un entier relatif.

Supposons que x soit solution de l'équation (1).

On a alors : $x=-\mathrm{E}(x)$.

Or $\mathrm{E}(x)$ est un entier relatif (par définition de la partie entière d'un réel). Par conséquent, x est un entier relatif.

b) En déduire la (ou les) solution(s) de l'équation (1).

On a démontré dans la question a) que si x est solution de l'équation (1) alors x est un entier relatif.

On a alors : $\mathrm{E}(x)=x$.

Par conséquent, (1) donne $x+x=0$ soit $x=0$.

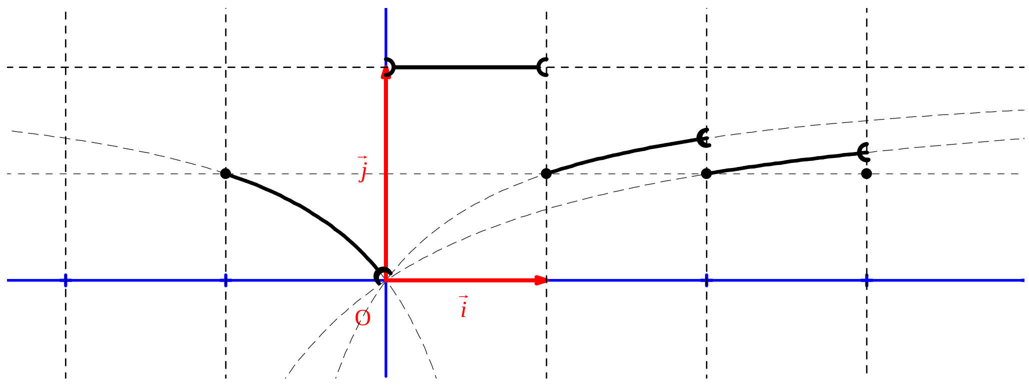
Réciproquement, on vérifie que 0 est bien solution de l'équation (1).

On en déduit que la solution de (1) est 0.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+\mathrm{E}(x)}$. Quel est son ensemble de définition ?

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

2°) Sur le graphique ci-dessous, on donne en pointillés les courbes d'équations $y=\dfrac{x}{x-1}$, $y=\dfrac{x}{x+1}$ et $y=\dfrac{x}{x+2}$.



Tracer avec soin et précision la représentation graphique de la fonction f pour $x \in [-1\,;0[\cup]0\,;3]$.

- $\forall x \in [-1\,;0[\quad \mathrm{E}(x)=-1$ donc $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.
- $\forall x \in]0\,;1[\quad \mathrm{E}(x)=0$ donc $f(x)=\dfrac{x}{x}=1$. La fonction f est constante sur l'intervalle $]0\,;1[$.
- $\forall x \in [1\,;2[\quad \mathrm{E}(x)=1$ donc $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.
- $\forall x \in [2\,;3[\quad \mathrm{E}(x)=2$ donc $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$.
- $f(3)=\dfrac{3}{3+3}=\dfrac{1}{2}$

On notera que le point d'abscisse 3 est un point isolé de la représentation graphique.

3°) Recopier et compléter sans justifier la phrase suivante en utilisant les notations mathématiques adaptées :

« Lorsque $x \in [-1\,;0[\cup]0\,;3]$, $f(x)$ décrit $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right[\cup\{1\}$. »

On peut aussi dire que l'image directe de l'ensemble $[-1\,;0[\cup]0\,;3]$ par f est l'ensemble $\left[0\,;\dfrac{2}{3}\right[\cup\{1\}$.

IV.

1°) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel. On ne demande pas de le programmer sur la calculatrice.

Entrée :
Saisir n (entier naturel supérieur ou égal à 2)

Initialisation :
U prend la valeur 1

Traitement :
Pour k allant de 1 à $n-1$ **Faire**
  A prend la valeur $\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k^2}$
  U prend la valeur $\mathrm{A}\times\mathrm{U}$
FinPour

Sortie :
Afficher U

Faire fonctionner l'algorithme « à la main » lorsque la valeur de n saisie en entrée est 6.
Écrire uniquement la valeur de U affichée en sortie (valeur exacte).

$$\frac{1}{20}$$

Le mieux est de dresser un tableau d'évolution des variables k, A et U.

	Étape 0	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5
k		1	2	3	4	5
A		2	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{25}$
U	1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{20}$

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \frac{(n-1)!}{n}u_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = v_n$.
On n'utilisera pas de récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} = \frac{n!}{n+1}u_{n+1}$$

$$= \frac{n!}{n+1} \times \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)u_n$$

$$= \frac{n!}{\cancel{n+1}} \times \frac{\cancel{n+1}}{n^2}u_n$$

$$= \frac{n!}{n^2}u_n$$

$$= \frac{n \times (n-1)!}{n^2}u_n$$

$$= \frac{(n-1)!}{n}u_n$$

$$= v_n$$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $u_n = \frac{n}{(n-1)!}$.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} = v_n$.
On en déduit que la suite (v_n) est constante.

Or $v_1 = \frac{(1-1)!}{1} \times 1 = 0! = 1 \quad (0! = 1$ par convention$)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{(n-1)!}{n}u_n = 1$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n}{(n-1)!}$.

V.

Au brouillon, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\left(e^x + 1\right)^2 = 4e^x \quad (1) \;;\; \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 = 9 \quad (2) \;;\; \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1-e^x} = 4 \quad (3) \;;\; \frac{5}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}} = 2 \quad (4)$.

Compléter le tableau ci-dessous où S_1, S_2, S_3, S_4 désignent les ensembles de solutions respectifs des équations (1), (2), (3), (4).
Rédiger la résolution des équations sur les lignes ci-contre.

$S_1 = \{0\}$	$S_2 = \{2\ln 4\}$	$S_3 = \left\{\ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$	$S_4 = \{\ln 3\}$

$(1) \Leftrightarrow e^{2x} + 2e^x + 1 = 4e^x$
$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \left(e^x - 1\right)^2 = 0$
$\Leftrightarrow e^x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow e^x = 1$
$\Leftrightarrow x = 0$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{e^x} - 1 = 3$ ou $\sqrt{e^x} - 1 = -3$
$\Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 4$ ou $\sqrt{e^x} = -2$ (impossible)
$\Leftrightarrow e^x = 16$
$\Leftrightarrow x = \ln 16$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{e^x} - 1 = 3$ ou $\sqrt{e^x} - 1 = -3$

$\Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 4$ ou $\sqrt{e^x} = -2$ (impossible)

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = 4$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \ln 4$

$\Leftrightarrow x = 2\ln 4$

Autre méthode :

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{e^x} - 1 = 3$ ou $\sqrt{e^x} - 1 = -3$

$\Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 4$ ou $\sqrt{e^x} = -2$ (impossible)

$\Leftrightarrow e^x = 16$

$\Leftrightarrow x = \ln 16$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{2}{1-\left(e^x\right)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{2}{1-\left(e^x\right)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-e^{2x}} = 4$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln \frac{1}{2}$$

$$(4) \Leftrightarrow \frac{5}{1+e^x} + \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = 2 \quad \text{(on utilise la propriété } e^{-x} = \frac{1}{e^x}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5+e^x}{1+e^x} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1+e^x\right) = 5+e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 3$$