$1^{\text{ère}}$ **S1**

Contrôle du mardi 8 novembre 2016 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point)

On considère le polynôme $P(x) = -3x^2 - x + 4$.

Compléter sans explication la phrase suivante par des égalités du type $x = ...$ en utilisant le connecteur logique adapté :

$P(x) = 0$ équivaut à ………………………………………….. .

1°) Compléter le tableau ci-dessous donnant le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x (ne pas oublier les 0 !).

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $P(x)$	

2°) Résoudre les inéquations suivantes :

$(x-2)(-3x^2 - x + 4) < 0 \quad (1) \qquad ; \qquad \dfrac{-3x^2 - x + 4}{x} \geqslant 0 \quad (2)$.

Après résolution au brouillon, on complètera le tableau suivant donnant les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs de (1) et (2).

$S_1 =$ ………………………………………………	$S_2 =$ ………………………………………………

II. (2 points)

On cherche deux réels dont la somme vaut $\sqrt{2}$ et le produit vaut $\dfrac{1}{4}$.

- Compléter la phrase suivante en écrivant une équation du second degré d'inconnue X.

Les réels cherchés sont les solutions de l'équation : ………………………………………….. .

- Résoudre cette équation puis compléter la phrase suivante

Les réels cherchés sont ………………………………………………………….. .

III. (5 points)

Partie 1 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 1 point)

On considère le polynôme $P(x) = x^2 - 2mx - 1$ où m est un réel.

1°) Calculer le discriminant réduit de $P(x)$ en fonction de m.

…………………………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) Justifier que le polynôme $P(x)$ admet toujours deux racines dans $\mathbb{R}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Donner l'expression des deux racines x_1 et x_2 en fonction de m (on prend $x_1 < x_2$).

……………………………………………… ………………………………………………

Partie 2 (2 points)

On considère le polynôme $Q(x) = x^2 - 2mx + 1$ où m est un réel.

Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

………………………………… (un seul résultat, sans égalité)

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 2 points)

1°) Donner une factorisation du polynôme $2x^2 + x - 3$ en produit de deux facteurs du premier degré.

Pour tout réel x, on a : $2x^2 + x - 3 =$ ……………………………………………………… (une seule égalité)

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x^2 - 9}{2x^2 + x - 3}$. On note $\mathcal{D}$ son ensemble de définition.

- Compléter l'égalité : $\mathcal{D} =$ ……………………

- Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a : $f(x) =$ ……………………………… .

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Le but de cette question est de résoudre l'équation $x-4\sqrt{x}+3=0$ (1) à l'aide d'un changement d'inconnue.

On résout (1) dans …………… .

On pose $X=\sqrt{x}$.

(1) s'écrit alors ……………………………………………………… $(1')$.

On considère le polynôme …………………………………………. .

Les racines de ce polynôme sont …………………………………………. .

Or $X=\sqrt{x}$.

On en déduit que (1) est successivement équivalente à (deux lignes seulement à compléter : première ligne avec des égalités du type $\sqrt{x}=...$ et deuxième ligne avec des égalités du type $x=...$) :

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (1).

$$S_1=......................................$$

2°) Résoudre l'inéquation $x-4\sqrt{x}+3\geqslant 0$ (2) en reprenant la même rédaction qu'au 1°) mais en effectuant les adaptations nécessaires.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

VI. (2 points)

On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

On note D la droite d'équation $y=x+2$.

Le but de l'exercice est déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et de D (on prendra $x_\mathrm{A}<x_\mathrm{B}$).

Compléter les phrase suivantes :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D sont les solutions de l'équation ……………………….…. (1).

On résout (1) dans ……. .

Résoudre l'équation (1) au brouillon et compléter la phrase suivante :

Les points A et B ont pour abscisses respectives ……………………………………………………………….

On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

Corrigé du contrôle du 8-11-2016

I.

On considère le polynôme $P(x) = -3x^2 - x + 4$.

Compléter sans explication la phrase suivante par des égalités du type $x = ...$ en utilisant le connecteur logique adapté :

$P(x) = 0$ équivaut à ……………………………………………….. .

$$P(x) = 0 \text{ équivaut à } x = 1 \text{ ou } x = -\frac{4}{3}.$$

1°) Compléter le tableau ci-dessous donnant le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x (ne pas oublier les 0 !).

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2°) Résoudre les inéquations suivantes :

$(x-2)(-3x^2 - x + 4) < 0 \quad (1) \quad ; \quad \dfrac{-3x^2 - x + 4}{x} \geqslant 0 \quad (2).$

Après résolution au brouillon, on complètera le tableau suivant donnant les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectifs de (1) et (2).

$S_1 = \left]-\frac{4}{3}\,;1\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$	$S_2 = \left]-\infty\,;-\frac{4}{3}\right] \cup \left]0\,;1\right]$

- On dresse un tableau de signes pour chacune des deux inéquations.
- Pour la première inéquation, on aura deux lignes : signe de $x-2$ et signe de $-3x^2 - x + 4$.

Les valeurs charnières sont, dans l'ordre croissant, $-\frac{4}{3}$, 1, 2.

- Pour la deuxième inéquation, on aura deux lignes : signe de $-3x^2 - x + 4$ et signe de x.

Les valeurs charnières sont, dans l'ordre croissant, $-\frac{4}{3}$, 0 (valeur interdite), 2.

Penser à la double barre pour la valeur interdite.
Penser à écrire 0^{num} et $0^{\text{dén}}$.

II.

On cherche deux réels dont la somme vaut $\sqrt{2}$ et le produit vaut $\frac{1}{4}$.

- Compléter la phrase suivante en écrivant une équation du second degré d'inconnue X.

Les réels cherchés sont les solutions de l'équation : $X^2 - X\sqrt{2} + \frac{1}{4} = 0$.

Une équation comporte toujours un signe d'égalité.

- Résoudre cette équation puis compléter la phrase suivante

Les réels cherchés sont $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

III.

Partie 1

On considère le polynôme $P(x) = x^2 - 2mx - 1$ où m est un réel.

1°) Calculer le discriminant réduit de $P(x)$ en fonction de m.

$m^2 + 1$ (un seul résultat sans égalité)

2°) Justifier que le polynôme $P(x)$ admet toujours deux racines dans $\mathbb{R}$.

1$^{\text{ère}}$ justification :
Pour tout réel m, le discriminant réduit de réduit de $P(x)$ est strictement positif.

2$^{\text{e}}$ justification :
Le coefficient de x^2 et le coefficient constant sont de signes contraires.

Donner l'expression des deux racines x_1 et x_2 en fonction de m (on prend $x_1 < x_2$).

$x_1 = m + \sqrt{m^2+1} \qquad x_2 = m - \sqrt{m^2+1}$

Partie 2

On considère le polynôme $Q(x)=x^2-2mx+1$ où m est un réel.

Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$ (un seul résultat, sans égalité)

Justification :

Le discriminant réduit de $Q(x)$ est égal à m^2-1.

$m^2-1>0$ si et seulement si $m^2>1$

si et seulement si $m<-1$ ou $m>1$

IV.

1°) Donner une factorisation du polynôme $2x^2+x-3$ en produit de deux facteurs du premier degré.

Pour tout réel x, on a : $2x^2+x-3=(2x+3)(x-1)$ (une seule égalité)

On cherche les racines du polynôme $2x^2+x-3$: 1 (racine évidente) et $-\dfrac{3}{2}$ (obtenue par produit).

On applique ensuite directement la formule de factorisation d'un polynôme du second degré qui admet deux racines distinctes.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x^2-9}{2x^2+x-3}$. On note $\mathcal{D}$ son ensemble de définition.

• Compléter l'égalité : $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{1\,;-\dfrac{3}{2}\right\}$

• Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x\in\mathcal{D}$.

Pour tout $x\in\mathcal{D}$, on a : $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

Justification :

On factorise le numérateur grâce à une identité remarquable.

Pour tout $x\in\mathcal{D}$, on a : $f(x)=\dfrac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)(x-1)}=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

V.

Dans cet exercice, il est très important de faire la distinction entre les x et X.

1°) Le but de cette question est de résoudre l'équation $x-4\sqrt{x}+3=0$ (1) à l'aide d'un changement d'inconnue.

On résout (1) dans $\mathbb{R}_+$.

On pose $X=\sqrt{x}$.

(1) s'écrit alors $X^2-4X+3=0$ $(1')$.

On considère le polynôme X^2-4X+3.

Les racines de ce polynôme sont 1 et 3.

Or $X=\sqrt{x}$.

On en déduit que (1) est successivement équivalente à (deux lignes seulement à compléter : première ligne avec des égalités du type $\sqrt{x}=\ldots$ et deuxième ligne avec des égalités du type $x=\ldots$) :

$\sqrt{x}=1$ ou $\sqrt{x}=3$

$x=1$ ou $x=9$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (1).

$$S_1=\{1\,;9\}$$

2°) Résoudre l'inéquation $x-4\sqrt{x}+3\geqslant 0$ (2) en reprenant la même rédaction qu'au 1°) mais en effectuant les adaptations nécessaires.

On résout (2) dans $\mathbb{R}_+$.

On pose $X=\sqrt{x}$.

(2) s'écrit alors $X^2-4X+3\geqslant 0$ $(2')$.

On considère le polynôme X^2-4X+3.

Les racines de ce polynôme sont 1 et 3.

D'après la règle du signe d'un trinôme du second degré (on peut éventuellement faire un tableau de signes), $(2')$ équivaut à $X\leqslant 1$ ou $X\geqslant 3$.

Le tableau de signe du polynôme X^2-4X+3 n'est pas forcément utile peut éventuellement permettre de trouver plus facilement.

Or $X=\sqrt{x}$.

On en déduit que (2) est successivement équivalente à :

$\sqrt{x}\leqslant 1$ ou $\sqrt{x}\geqslant 3$

$0\leqslant x\leqslant 1$ ou $x\geqslant 9$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'inéquation (2).

$$S_2=[0\,;1]\cup[9\,;+\infty[$$

VI.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note D la droite d'équation $y=x+2$.

Le but de l'exercice est déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et de D (on prendra $x_{\text{A}}<x_{\text{B}}$).

Compléter les phrase suivantes :

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D sont les solutions de l'équation $\dfrac{2}{x}=x+2\ \ (1)$.

On résout (1) dans $\mathbb{R}^*$.

Résoudre l'équation (1) au brouillon et compléter la phrase suivante :

Les points A et B ont pour abscisses respectives $-1-\sqrt{3}$ et $-1+\sqrt{3}$.

On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

L'équation (1) est successivement équivalente à :

$2=x^2+2x$ (simple produit en croix)

$x^2+2x-2=0$

Il s'agit d'une équation du second degré. On calcule son discriminant réduit $\Delta'=3$.