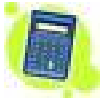
1ère S1

Contrôle du mardi 18 octobre 2016 (50 minutes)



Prénom et nom : ……………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère le polynôme $P_m\left(x\right)=\left(m-2\right)x^2+\left(3m+1\right)x+m+2$ où m est un réel distinct de 2.

Les coefficients du polynôme sont $a=m-2$ (coefficient de x^2), $b=3m+1$ (coefficient de x), $c=m+2$.

1°) Dans cette question, on prend $m=1$. On a alors $P_1\left(x\right)=-x^2+4x+3$.

Déterminer la forme canonique de $P_1\left(x\right)$. On attend la démarche classique en faisant apparaître une identité remarquable du second degré.

$P_1\left(x\right)=$ …………………………………………………

$=$ …………………………………………………

$=$ …………………………………………………

$=$ …………………………………………………

2°) Calculer le discriminant Δ_m de $P_m\left(x\right)$ en fonction de *m*. Écrire le détail du calcul sur les lignes ci-dessous.

$\Delta_m=$ ……………………………. (un seul résultat sous forme développée)

…….

…….

…….

II. (2 points)

Déterminer l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\left|\sqrt{x}-2\right|=3$ (1).

$S=$ ……………………………….

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition $\mathbf{D}$ de la fonction f c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f\left(x\right)$ est possible.

Rédiger la recherche par chaîne d'équivalences selon le modèle donné dans chaque question.
Conclure par une égalité d'ensembles : $\mathbf{D}=$…… en utilisant les notations adéquates.

1°) $f:x\mapsto\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$

$f\left(x\right)$ existe si et seulement si ……………………………………………

si et seulement si ……………………………………………

$\mathbf{D}=$ ………….....................

2°) $f:x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$f\left(x\right)$ existe si et seulement si ……………………………………………

si et seulement si ……………………………………………

si et seulement si ……………………………………………

$\mathbf{D}=$ ………….....................

IV. (2 points)

On considère une fonction *f* définie sur l'intervalle $\left[-8\,;9\right]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-8		-3		1		5		9
Variations de f	2	↘	0	↗	5	↘	-1	↗	1

On précise de plus que $f\left(3\right)=f\left(6\right)=0$.

Quel est l'ensemble de définition de la fonction *g* définie par $g\left(x\right)=\sqrt{f\left(x\right)}$?

…………………………… (une seule réponse sans égalité)

V. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

À tout réel m strictement positif, on associe la fonction $f_m : x \mapsto 1 - m\sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $I = [0 ; +\infty[$.

1°) Le but de cette question est de déterminer le sens de variation de f_m sur I à partir de celui de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en utilisant les règles du cours.

Compléter les phrases du raisonnement suivant par « croissante » ou « décroissante » permettant de déterminer le sens de variation de f_m sur I.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement ………………………….. sur I.

$m > 0$ par hypothèse donc $-m < 0$.

Par conséquent, la fonction $x \mapsto -m\sqrt{x}$ est strictement ………………………….. sur I.

On en déduit que la fonction f_m est strictement ………………………….. sur I.

2°) On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction de m.

………………. (un seul résultat)

3°) Sur l'écran de la calculatrice, tracer, en choisissant une fenêtre graphique adaptée, la courbe $\mathcal{C}_3$ (représentative de la fonction $f_3 : x \mapsto 1 - 3\sqrt{x}$) ainsi que la courbe H d'équation $y = -\dfrac{1}{x}$.
On admet que $\mathcal{C}_3$ et H se coupent en unique point A.

Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_A.

La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_A est égale à ……………………. .

VI. (4 points)

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $(\text{I}) \begin{cases} 3\sqrt{x} + \dfrac{2}{y} = 8 \\ 4\sqrt{x} + \dfrac{3}{y} = 11 \end{cases}$ à l'aide d'un changement d'inconnues.

On pose $X = \sqrt{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$.

Le système (I) s'écrit alors $(\text{II}) \begin{cases} \text{………………………………} \\ \text{………………………………} \end{cases}$

(penser à bien écrire le système avec les inconnues X et Y).

Le système (II) est un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Son déterminant est égal à …….. .

Le déterminant est non nul donc le système (II) admet ………………………………………………………. .

Pour obtenir ce couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases} \text{………………………………} \\ \text{………………………………} \end{cases} \begin{array}{|l} \times \\ \times \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \times \\ \times \end{array}$$

(rappel : l'inconnue est le couple $(X ; Y)$)

$$\begin{cases} \text{…………….} = \text{…………….} \\ \text{…………….} = \text{…………….} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{…………….} = \text{…………….} \\ \text{…………….} = \text{…………….} \end{cases}$$

Or $X = \sqrt{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$.

Donc le système (I) est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \text{……….} \\ \dfrac{1}{y} = \text{……….} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \text{……….} \\ y = \text{……….} \end{cases}$$

Le couple solution du système (I) est : ……………….. (écrire juste le couple, sans égalité).

Rappel : Un couple se note avec des parenthèses.

Corrigé du contrôle du 18-10-2016

I.

On considère le polynôme $P_m(x)=(m-2)x^2+(3m+1)x+m+2$ où m est un réel distinct de 2.
Les coefficients du polynôme sont $a=m-2$ (coefficient de x^2), $b=3m+1$ (coefficient de x), $c=m+2$.

1°) Dans cette question, on prend $m=1$. On a alors $P_1(x)=-x^2+4x+3$.
Déterminer la forme canonique de $P_1(x)$. On attend la démarche classique en faisant apparaître une identité remarquable du second degré.

$$P_1(x)=-\left(x^2-4x-3\right)$$

$$=-\left[(x-2)^2-4-3\right]$$

$$=-(x-2)^2+7$$

On vérifie ce résultat en développant $-(x-2)^2+7$.

2°) Calculer le discriminant Δ_m de $P_m(x)$ en fonction de m. Écrire le détail du calcul sur les lignes ci-dessous.

$\Delta_m=5m^2+6m+17$ (un seul résultat sous forme développée)

$$\Delta_m=(3m+1)^2-4(m+2)(m-2)$$

$$=9m^2+6m+1-4\left(m^2-4\right)$$

$$=5m^2+6m+17$$

II.

Déterminer l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\left|\sqrt{x}-2\right|=3$ (1).

$$S=\{\,25\,\}$$

On résout (1) dans $\mathbb{R}_+$.

(1) est successivement équivalente à :
$\sqrt{x}-2=3$ ou $\sqrt{x}-2=-3$
$\sqrt{x}=5$ ou $\sqrt{x}=-1$ (cette équation n'a pas de solutions car le résultat d'une racine carrée est toujours positif ou nul)
$x=25$

III.

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition **D** de la fonction f c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le calcul de $f(x)$ est possible.

Rédiger la recherche par chaîne d'équivalences selon le modèle donné dans chaque question.
Conclure par une égalité d'ensembles : **D** $=\ldots\ldots$ en utilisant les notations adéquates.

Cet exercice n'a pas été réussi du tout. Il y a eu de nombreuses difficultés dans l'écriture des conditions.

1°) $f:x\mapsto\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$

$f(x)$ existe si et seulement si $1-x\geqslant 0$ $\boxed{\text{et}}$ $x\neq 0$ (connecteur logique « et »)

si et seulement si $x\leqslant 1$ $\boxed{\text{et}}$ $x\neq 0$

D $=\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;1\right]$

2°) $f:x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $4-x^2\geqslant 0$ $\boxed{\text{et}}$ $\sqrt{4-x^2}\neq 0$

si et seulement si $4-x^2>0$

si et seulement si $-2<x<2$ (tableau de signes ou utilisation de la courbe représentative de la fonction « carrée » en observant que l'inéquation $4-x^2>0$ est équivalente à $x^2<4$)

D $=\left]-2\,;2\right[$

IV.

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-8\,;9]$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-8		-3		1		5		9
Variations de f	2	↘	0	↗	5	↘	-1	↗	1

On précise de plus que $f(3)=f(6)=0$.

Quel est l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{f(x)}$?

$[-8\,;3]\cup[6\,;9]$ (une seule réponse sans égalité)

On regarde les intervalles sur lesquels f est positive ou nulle.

On peut éventuellement établir le tableau de signes de $f(x)$.

Cet exercice n'a pas été réussi du tout. Il y a eu de nombreuses difficultés dans l'écriture des conditions.

V.

À tout réel m strictement positif, on associe la fonction $f_m : x \mapsto 1-m\sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $I=[0\,;+\infty[$.

1°) Le but de cette question est de déterminer le sens de variation de f_m sur I à partir de celui de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en utilisant les règles du cours.

Compléter les phrases du raisonnement suivant par « croissante » ou « décroissante » permettant de déterminer le sens de variation de f_m sur I.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur I.

$m>0$ par hypothèse donc $-m<0$.

Par conséquent, la fonction $x \mapsto -m\sqrt{x}$ est strictement décroissante sur I.

On en déduit que la fonction f_m est strictement décroissante sur I.

2°) On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction de m.

$\dfrac{1}{m^2}$ (un seul résultat)

On résout l'équation $f_m(x)=0$ (1) dans $\mathbb{R}_+$.

(1) est successivement équivalente à :

$1-m\sqrt{x}=0$

$\sqrt{x}=\dfrac{1}{m}$

$x=\left(\dfrac{1}{m}\right)^2$

$x=\dfrac{1}{m^2}$ (car m est strictement positif par hypothèse)

3°) Sur l'écran de la calculatrice, tracer, en choisissant une fenêtre graphique adaptée, la courbe $\mathcal{C}_3$ (représentative de la fonction $f_3 : x \mapsto 1-3\sqrt{x}$) ainsi que la courbe H d'équation $y=-\dfrac{1}{x}$.

On admet que $\mathcal{C}_3$ et H se coupent en unique point A.

Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_A.

La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x_A est égale à 0,679.

On trace d'abord les courbes $\mathcal{C}_3$ et H sur l'écran de la calculatrice en choisissant une bonne fenêtre graphique.

On utilise la commande spéciale de la calculatrice permettant d'obtenir les coordonnées du point d'intersection de deux courbes.

On obtient l'affichage : 0,67917809.

VI.

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $(\text{I})\begin{cases}3\sqrt{x}+\dfrac{2}{y}=8\\[4pt] 4\sqrt{x}+\dfrac{3}{y}=11\end{cases}$ à l'aide d'un changement d'inconnues.

On pose $X=\sqrt{x}$ et $Y=\dfrac{1}{y}$.

Le système (I) s'écrit alors $(\text{II})\begin{cases}3X+2Y=8\\4X+3Y=11\end{cases}$

(penser à bien écrire le système avec les inconnues X et Y).

Le système (II) est un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Son déterminant est égal à 1.

Le déterminant est non nul donc le système (II) admet un unique couple solution.

Pour obtenir ce couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases} 3X+2Y=8 \\ 4X+3Y=11 \end{cases} \begin{array}{|c|c} \times 3 & \times(-4) \\ \times(-2) & \times 3 \end{array}$$ (rappel : l'inconnue est le couple $(X\,;Y)$)

$$\begin{cases} 1X=2 \\ 1Y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=2 \\ Y=1 \end{cases}$$

Or $X=\sqrt{x}$ et $Y=\dfrac{1}{y}$.

Donc le système (I) est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

Le couple solution du système (I) est : $(4\,;1)$ (écrire juste le couple, sans égalité).

Rappel : Un couple se note avec des parenthèses.