TS1

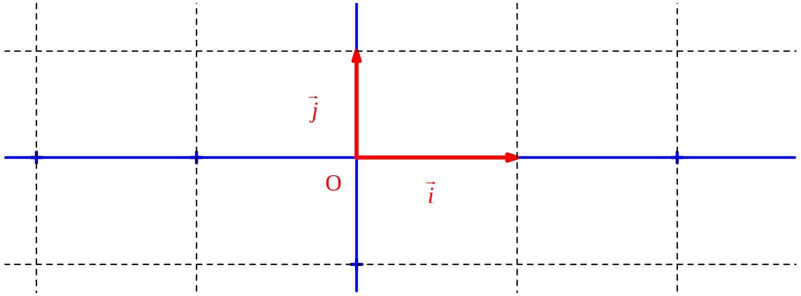
Contrôle du vendredi 14 octobre 2016 (50 minutes)

Prénom : …………………… **Nom : ………………………………**

Note : …. / 20

I. (2 points)

Tracer sans justifier, avec le plus grand soin, la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto (-1)^{\mathrm{E}(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$.



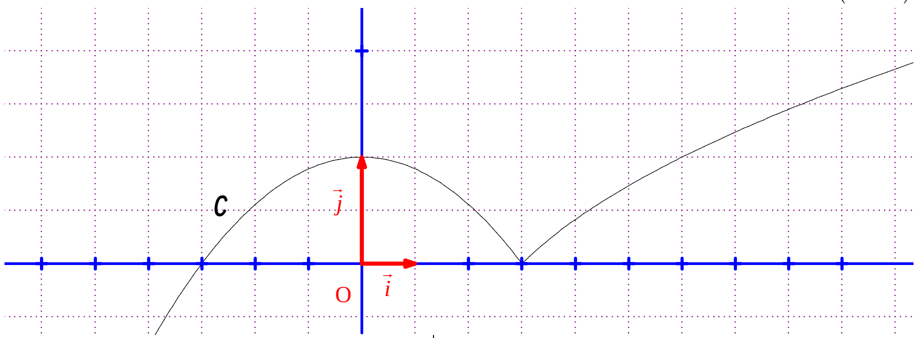
Quel est l'ensemble des valeurs prises par *f* lorsque *x* décrit $\mathbb{R}$? Répondre sans justifier.

……………………… (une seule réponse, en utilisant la notation mathématique adéquate)

Aucune justification n'est demandée dans les exercices **II** à **V**.

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



Cocher la proposition exacte parmi les propositions ci-contre.

- ☐ *f* est continue sur $\mathbb{R}$; *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ *f* est continue sur $\mathbb{R}$; *f* n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ *f* n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ *f* n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; *f* n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°) On admet dans cette question que la fonction *f* est définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{9}$ si $x < 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$ si $x \geqslant 3$.

Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.

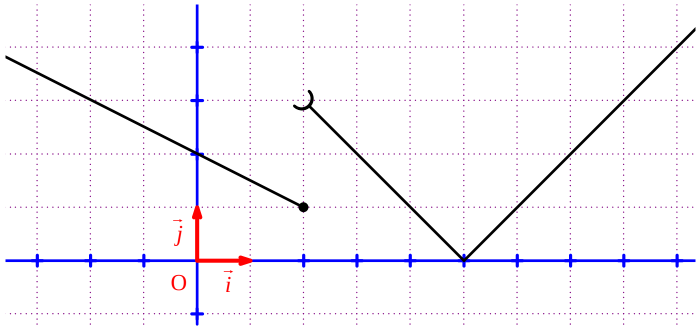
On donnera les solutions sans notation mathématique et sans égalité.

………………………………………..……….

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

À tout réel *m* on associe la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = 2 - \frac{x}{2}$ si $x \leqslant 2$ et $f_m(x) = |x - m|$ si $x > 2$.

1°) On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f_m pour une valeur particulière de *m*. Déterminer la valeur de *m* correspondante.



$m =$ …………

2°) Dans cette question, on choisit $m = 8$.

Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f_8(x) = 10$?

……………………………….. (écrire l'ensemble des solutions en utilisant la notation mathématique adéquate)

3°) Est-il possible de choisir *m* tel que la fonction f_m soit continue sur $\mathbb{R}$? Répondre par oui ou non.

…………..

Si oui, préciser la (les) valeur(s) de *m* correspondante(s).

…………………..…………… (répondre sans écrire d'égalités)

4°) Est-il possible de choisir m tel que la fonction f_m soit continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$?
Répondre par oui ou non.

…………..

Si oui, préciser la (les) valeur(s) de m correspondante(s).

…………………..……………. (répondre sans écrire d'égalités)

IV. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-8\,;9]$, continue sur cet intervalle et dont les variations sont données dans le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée dans cet exercice.

x	-8		-3		1		6		9
Variations de f	-2	↘		↗	0	↘		↗	8
			-5				-3		

1°) Compléter les phrases suivantes :

- Lorsque x décrit l'intervalle $[1\,;6]$, $f(x)$ décrit l'intervalle ……………….. (une seule réponse).
- Lorsque x décrit l'intervalle $[-8\,;1]$, $f(x)$ décrit l'intervalle ……………….. (une seule réponse).
- Lorsque x décrit l'intervalle $[-3\,;9]$, $f(x)$ décrit l'intervalle ……………….. (une seule réponse).

2°) Déterminer le nombre de solutions dans l'intervalle $[-8\,;9]$ de l'équation $|f(x)|=1$.

…………………….. (écrire juste le nombre de solutions sans égalité)

V. (2 points)

Soit F une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$. On ne cherchera pas l'expression de F.

On considère les fonctions G et H définies par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(2x)$ et $\mathrm{H}(x)=\mathrm{F}(x^2)$.

Calculer $\mathrm{G}'(x)$ et $\mathrm{H}'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ …………..………………… $\forall x \in \mathbb{R}$ …………..…………………

VI. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points ; 4°) 1 point)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f_n'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n'(x) = $ ....

2°) Compléter le tableau récapitulatif suivant donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$.

x	0	1
Signe de $f_n'(x)$		
Variations de f_n		

3°) Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ (E_n) admet une unique solution α_n dans l'intervalle I.

………………………………………………………………………………………………………..……

………………………………………………………………………………………………………..……

………………………………………………………………………………………………………..……

………………………………………………………………………………………………………..……

………………………………………………………………………………………………………..……

………………………………………………………………………………………………………..……

………………………………………………………………………………………………………..……

………………………………………………………………………………………………………..……

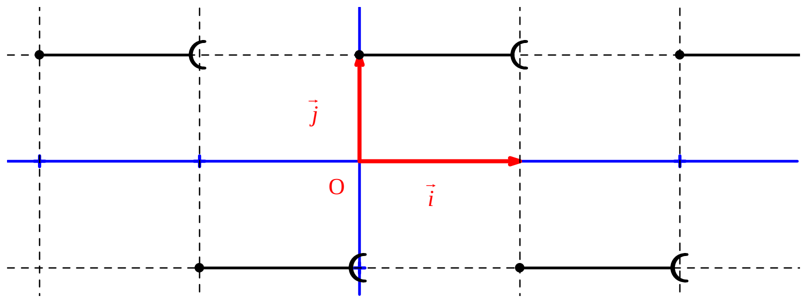
4°) Dans cette question, on prend $n=5$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de α_5 (justifier).

……………………………..

Corrigé du contrôle du 14-10-2016

I.

Tracer sans justifier, avec le plus grand soin, la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto (-1)^{E(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$.



Si $0 \leqslant x < 1$, alors $E(x) = 0$ donc $f(x) = (-1)^0 = 1$.

Si $1 \leqslant x < 2$, alors $E(x) = 1$donc $f(x) = (-1)^1 = -1$.

On a 1, – 1, 1, – 1 etc.

La fonction *f* est périodique de période 2.

La représentation graphique de *f* est la réunion de segments de droites (fermés d'un côté ouvert de l'autre).
On peut regarder ce qui se passe en utilisant la calculatrice graphique (calculatrice Numworks : $(-1)^{\lfloor x \rfloor}$; il ne faut pas oublier les parenthèses autour du – 1).

Il faut faire attention aux points d'arrêt pour lesquels il fallait être très précis (ce que la calculatrice ne permet pas de voir).

Quel est l'ensemble des valeurs prises par *f* lorsque *x* décrit $\mathbb{R}$? Répondre sans justifier.

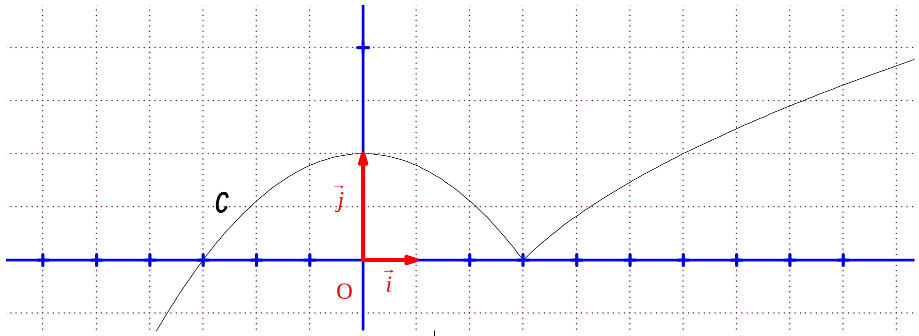
$\{-1;1\}$ (une seule réponse, en utilisant la notation mathématique adéquate)

Attention à bien respecter la notation avec des accolades puisqu'il s'agit d'un ensemble.

Aucune justification n'est demandée dans les exercices **II** à **V**.

II.

1°) On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Cocher la proposition exacte parmi les propositions ci-contre.

- ☐ *f* est continue sur $\mathbb{R}$; *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☒ *f* est continue sur $\mathbb{R}$; *f* n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ *f* n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ *f* n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; *f* n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour savoir si une fonction est dérivable sur R, on regarde si l'on peut tracer une tangente à la représentation graphique en tout point.

La fonction *f* ne semble pas dérivable en 3 : il semble en effet que la courbe $\mathcal{C}$ admette deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents au point A s'abscisse 3.
Autrement dit, A, est un « point anguleux ».

2°) On admet dans cette question que la fonction *f* est définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{9}$ si $x < 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$ si $x \geqslant 3$.

Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.

On donnera les solutions sans notation mathématique et sans égalité.

$$\left\{-\frac{3}{\sqrt{2}}\,;\frac{3}{\sqrt{2}}\,;\frac{17}{4}\right\}$$

On résout l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{x^2}{9}=\dfrac{1}{2} \\ x<3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \sqrt{x-2}-1=\dfrac{1}{2} \\ x\geqslant 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{9}=\dfrac{1}{2} \\ x<3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \sqrt{x-2}=\dfrac{3}{2} \\ x\geqslant 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{9}{2} \\ x<3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-2=\dfrac{9}{4} \\ x\geqslant 3 \end{cases}$$

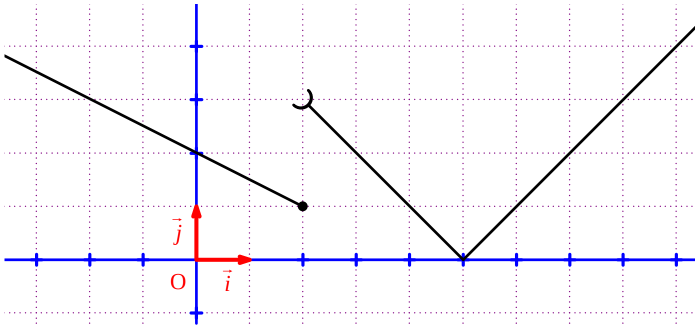
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=-\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ x<3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=\dfrac{17}{4} \\ x\geqslant 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=-\dfrac{3}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=\dfrac{17}{4}$$

III.

À tout réel m, on associe la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x)=2-\dfrac{x}{2}$ si $x\leqslant 2$ et $f_m(x)=|x-m|$ si $x>2$.

1°) On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f_m pour une valeur particulière de m.
Déterminer la valeur de m correspondante.



$m=5$

On constate graphiquement que $f_m(5)=0$.

Or $f_m(5)=|5-m|$ d'où $|5-m|=0$ soit $m=5$.

2°) Dans cette question, on choisit $m=8$.
Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f_8(x)=10$?

$\{-16\,;18\}$ (écrire l'ensemble des solutions en utilisant la notation mathématique adéquate)

On résout l'équation $f_8(x)=10$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\dfrac{x}{2}=10 \\ x\leqslant 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} |x-8|=10 \\ x>2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x}{2}=8 \\ x\leqslant 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-8=10 \text{ ou } x-8=-10 \\ x>2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-16 \\ x\leqslant 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=18 \text{ ou } x=-2 \\ x>2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=-16$ ou $x=18$ (la valeur -2 ne peut être retenue car elle n'est pas strictement supérieure à 2)

3°) Est-il possible de choisir m tel que la fonction f_m soit continue sur $\mathbb{R}$? Répondre par oui ou non.

oui

Si oui, préciser la (les) valeur(s) de m correspondante(s).

1 ; 3 (répondre sans écrire d'égalités)

La restriction de la fonction f_m à l'intervalle $]-\infty\,;2[$ est continue car c'est une fonction affine.

La restriction de la fonction f_m à l'intervalle $]2\,;+\infty[$ est continue d'après son expression (composée de fonctions continue).

Pour que la fonction f_m soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que sa représentation graphique se raccorde bien au point $A(2\,;1)$.

Cette condition se traduit algébriquement par l'égalité $|2-m|=1$ (2).

$(2) \Leftrightarrow 2-m=1$ ou $2-m=-1$

$\Leftrightarrow m=1$ ou $m=3$

4°) Est-il possible de choisir m tel que la fonction f_m soit continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$?
Répondre par oui ou non.

non

Si oui, préciser la (les) valeur(s) de m correspondante(s).

…………………..…………… (répondre sans écrire d'égalités)

Aucune des deux valeurs trouvées à la question 3°) ne donne une fonction monotone.
On s'en rend compte graphiquement en traçant les représentations graphiques des fonctions f_1 et f_3, éventuellement avec l'aide de la calculatrice.

IV.

On considère une fonction *f* définie sur l'intervalle $[-8\,;9]$, continue sur cet intervalle et dont les variations sont données dans le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée dans cet exercice.

x	-8		-3		1		6		9
Variations de f	-2	↘	-5	↗	0	↘	-3	↗	8

1°) Compléter les phrases suivantes :

- Lorsque x décrit l'intervalle $[1\,;6]$, $f(x)$ décrit l'intervalle $[-3\,;0]$ (une seule réponse).

- Lorsque x décrit l'intervalle $[-8\,;1]$, $f(x)$ décrit l'intervalle $[-5\,;0]$ (une seule réponse).

- Lorsque x décrit l'intervalle $[-3\,;9]$, $f(x)$ décrit l'intervalle $[-5\,;8]$ (une seule réponse).

Il faut faire attention à écrire les bornes dans le bon ordre (la plus petite borne à gauche, la plus grande à droite).

2°) Déterminer le nombre de solutions dans l'intervalle $[-8\,;9]$ de l'équation $|f(x)|=1$.

4 (écrire juste le nombre de solutions sans égalité)

On a l'équivalence $|f(x)|=1 \Leftrightarrow f(x)=1$ ou $f(x)=-1$.

On utilise ensuite le tableau de variations et le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires intervalle par intervalle.

V.

Soit F une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$. On ne cherchera pas l'expression de F.

On considère les fonctions G et H définies par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(2x)$ et $\mathrm{H}(x)=\mathrm{F}(x^2)$.

Calculer $\mathrm{G}'(x)$ et $\mathrm{H}'(x)$.

On sait que F est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On applique la formule de dérivation d'une composée de deux fonctions.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{G}'(x)=2\times \mathrm{F}'(2x)$$

$$=2\times\frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{H}'(x)=2x\times \mathrm{F}'(x^2)$$

$$=2x\times\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^2}}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$$

On utilise la formule de dérivation d'une composée : $(v\circ u)'(x)=u'(x)\times v'[u(x)]$.

La fonction G est la composée de la fonction $u : x \mapsto 2x$ suivie de la fonction F. Autrement dit, $\mathrm{G}=\mathrm{F}\circ u$.

La dérivée de la fonction u est la fonction $x \mapsto 2$.

La fonction H est la composée de la fonction $v : x \mapsto x^2$ suivie de la fonction F. Autrement dit, $\mathrm{H}=\mathrm{F}\circ v$.

La dérivée de la fonction v est la fonction $x \mapsto 2x$.

VI.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

> On peut noter que la fonction f_n est une fonction polynôme de degré n.

1°) Calculer $f_n'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n'(x)=n\left(x^{n-1}-1\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n'(x)=nx^{n-1}-n\times 1$ (le n de nx est une constante)

$=n\left(x^{n-1}-1\right)$ (mieux vaut donner l'expression sous forme factorisée)

2°) Compléter le tableau récapitulatif suivant donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;1]$.

On justifie ainsi le signe de $f_n'(x)$ sur I.

$\forall x \in [0\,;1[\quad 0 \leqslant x^{n-1} < 1$ donc $\forall x \in [0\,;1[\quad x^{n-1}-1<0$ soit $\forall x \in [0\,;1[\quad f_n'(x)<0$.

De plus, $f_n'(1)=0$.

x	0		1
Signe de $f_n'(x)$		$-$	0
Variations de f_n	1	$\searrow$	$2-n$

Sur la ligne du signe de $f_n'(x)$, on n'oublie pas de mettre un 0 pour $x=1$ car f_n' s'annule en 1.

On calcule les images de 0 et 1 par f_n. On remplace x par 0 et 1 et on garde le n.

$$f_n(0)=0^n-n\times 0+1 \\ =0-0+1 \\ =1$$

$$f_n(1)=1^n-n\times 1+1 \\ =1-n+1 \\ =2-n$$

On complète le tableau de variations de f_n avec ces deux valeurs.

3°) Démontrer que l'équation $f_n(x)=0 \quad (\mathrm{E}_n)$ admet une unique solution α_n dans l'intervalle I.

> L'équation (E_n) s'écrit $x^n-nx+1=0$.
> On ne cherche pas du tout à résoudre cette équation.
> Il s'agit juste de démontrer qu'elle admet une unique solution dans I.

x	0	α_n	1
Variations de f_n	1	0	$2-n$

On va appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires en vérifiant d'abord les 3 conditions C_1, C_2, C_3.

C_1 : La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme donc par restriction, f_n est continue sur I.

C_2 : $f_n(0)=1$ et $f_n(1)=2-n$

Or $n\geqslant 2$ par hypothèse. D'où $2-n\leqslant 0$ donc 0 est compris entre $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

C_3 : Dans la question 2°), on a établi que f_n est strictement décroissante sur I.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E_n) admet une unique solution α_n dans I.

Les deux premières conditions assurent l'existence.
La troisième condition assure l'unicité.

> Comme f_n est une fonction polynôme de degré n, il n'est pas possible de résoudre l'équation (E_n) de manière exacte dans le cas général.

On peut remarquer que pour $n=2$, la solution de l'équation (E_2) dans I est 1 car $f_2(1)=0$ d'après le tableau de variations.

4°) Dans cette question, on prend $n=5$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de α_5 (justifier).

L'équation (E_5) désigne l'équation $f_5(x)=0$ c'est-à-dire $x^5-5x+1=0$.

Calculatrice Numworks :

On utilise la commande de résolution des équations.
On obtient l'affichage :

x1 – 1.541652
x2 0.200064
x3 1.4405

Il s'agit de trois valeurs approchées. Ce ne sont pas des valeurs exactes.
On peut démontrer que ces trois solutions sont irrationnelles.

On retient x2 qui est la seule solution dans l'intervalle I (comprise entre 0 et 1).

Calculatrice TI

Avec le solveur d'équations polynomiale de la calculatrice (en rentrant $x^5-5x+1=0$), on obtient l'affichage : 0,2000641026.

On peut donc écrire $\alpha_5=0,2006...$ d'où $0,200\leqslant\alpha_5<0,201$.

Par conséquent, cet encadrement de α_5 nous permet d'affirmer que l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de α_5 est égale 0,200.

On notera que α_5 est la solution de (E_5) dans I donc $\alpha_5{}^5-5\alpha_5+1=0$.