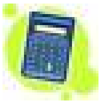
TS1

Contrôle du vendredi 16 septembre 2016 (50 minutes)



Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ……… / 20

I. (3 points)

On pose $z_1 = 1 - \left(\mathrm{i}\sqrt{2} - 1\right)^2$, $z_2 = \dfrac{6+4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$ et $z_3 = \dfrac{4}{1+\dfrac{3}{\mathrm{i}}}$.

Calculer z_1, z_2, z_3. On donnera les résultats sous forme algébrique.

$z_1 =$ ………………………	$z_2 =$ ………………………	$z_3 =$ ………………………

II. (8 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3, S_4 respectifs des équations (1), (2), (3), (4) suivantes d'inconnue complexe *z* (résolution au brouillon). On écrira les solutions sous forme algébrique.

$\dfrac{z}{2z-\mathrm{i}} = \mathrm{i} \quad (1)$; $2z + \mathrm{i}z = \overline{z} + 1 \quad (2)$; $(z+1)(2-z) = 3 \quad (3)$; $\mathrm{i}z\overline{z} + 3z = 0 \quad (4)$.

$S_1 =$ ………………………	$S_2 =$ ………………………	$S_3 =$ ………………………	$S_4 =$ ………………………

III. (2 points)

On pose $Z = (x+1+\mathrm{i}y)(x-1-\mathrm{i}y)$ où *x* et *y* sont deux nombres réels.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de *Z* en fonction de *x* et *y*.

$\mathrm{Re}\, Z =$ ………………………	$\mathrm{Im}\, Z =$ ………………………

IV. (2 points)

Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}\sqrt{3} - 1$ et B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \left(\overline{z_{\mathrm{A}}}\right)^2$.

Démontrer que B est le symétrique de O par rapport à A. On attend une justification rapide.

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

V. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Pour tout nombre complexe *z* distinct de – 1, on pose $z' = \dfrac{\mathrm{i}z}{z+1}$.

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où *x* et *y* sont deux réels tels que $(x\,;\,y) \neq (-1\,;\,0)$.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de *x* et *y*.
Il est demandé de ne pas développer les dénominateurs.

Donner les réponses dans le cadre au verso et détailler les calculs sur les lignes en dessous.
On pourra se contenter de donner seulement les grandes étapes de calcul. Tirer les traits de fractions à la règle.

$\mathrm{Re}\, z' =$ ………………………	$\mathrm{Im}\, z' =$ ………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

2°) On se place dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Déterminer l'ensemble *E* des points M de *P* d'affixe $z \neq -1$ tels que z' soit réel.

On rédigera ainsi la recherche (modèle à recopier ; ne rien écrire dans le cadre) :

> Soit M un point quelconque de *P* d'affixe $z \neq -1$.
> On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $\left(x\,;\,y\right) \neq \left(-1\,;\,0\right)$.
>
> $\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow z'$ réel
> $\Leftrightarrow$ ………………….
> $\Leftrightarrow$ ………………….
> $\Leftrightarrow$ ………………….

On conclura de la manière suivante : « L'ensemble *E* est ……………………………………………… ».

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 16-9-2016

I.

On pose $z_1=1-\left(\mathrm{i}\sqrt{2}-1\right)^2$, $z_2=\dfrac{6+4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$ et $z_3=\dfrac{4}{1+\dfrac{3}{\mathrm{i}}}$.

Calculer z_1, z_2, z_3. On donnera les résultats sous forme algébrique.

$z_1=2+2\mathrm{i}\sqrt{2}$	$z_2=2-3\mathrm{i}$	$z_3=\dfrac{2+6\mathrm{i}}{5}$

$$\begin{aligned} z_1&=1-\left(\mathrm{i}\sqrt{2}-1\right)^2\\ &=1-\left(-2-2\mathrm{i}\sqrt{2}+1\right)\\ &=1-\left(-1-2\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\\ &=2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2&=\frac{6+4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}\\ &=\frac{6+4\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\\ &=\frac{3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\\ &=\frac{3\mathrm{i}-2}{-1}\\ &=2-3\mathrm{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3&=\frac{4}{1+\frac{3}{\mathrm{i}}}\\ &=\frac{4}{1-3\mathrm{i}}\\ &=\frac{4(1+3\mathrm{i})}{10}\\ &=\frac{2(1+3\mathrm{i})}{5}\\ &=\frac{2+6\mathrm{i}}{5}\end{aligned}$$

Variante pour z_3 :

$z_3=\dfrac{4\mathrm{i}}{\mathrm{i}+3}$ etc.

II.

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3, S_4 respectifs des équations (1), (2), (3), (4) suivantes d'inconnue complexe z (résolution au brouillon). On écrira les solutions sous forme algébrique.

$\dfrac{z}{2z-\mathrm{i}}=\mathrm{i}\quad(1)$; $2z+\mathrm{i}z=\overline{z}+1\quad(2)$; $(z+1)(2-z)=3\quad(3)$; $\mathrm{i}z\overline{z}+3z=0\quad(4)$.

$S_1=\left\{\dfrac{1+2\mathrm{i}}{5}\right\}$	$S_2=\left\{\dfrac{3-\mathrm{i}}{4}\right\}$	$S_3=\left\{\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$	$S_4=\{0\,;-3\mathrm{i}\}$

Un certain nombre d'élèves ont eu des difficultés pour écrire correctement les ensembles des solutions des équations (oubli des accolades la plupart du temps).

On résout l'équation (1) dans $\mathbb{C}\setminus\left\{\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right\}$.

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow z=\mathrm{i}(2z-\mathrm{i})\\ &\Leftrightarrow z=2\mathrm{i}z+1\\ &\Leftrightarrow z(1-2\mathrm{i})=1\\ &\Leftrightarrow z=\frac{1}{1-2\mathrm{i}}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{1+2\mathrm{i}}{5}\quad\text{(cette valeur convient car elle est différente de }\frac{\mathrm{i}}{2}\text{)}\end{aligned}$$

Pour l'équation (2), on pose $z=a+\mathrm{i}b$ où a et b sont deux réels.

$$\begin{aligned}(2)&\Leftrightarrow 2(a+\mathrm{i}b)+\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)=(a-\mathrm{i}b)+1\\ &\Leftrightarrow (2a-b)+\mathrm{i}(a+2b)=(a+1)-\mathrm{i}b\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=a+1\\ a+2b=-b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a-b=1\\ a+3b=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\ b=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\quad\text{(résolution par combinaisons)}\\ &\Leftrightarrow z=\frac{3-\mathrm{i}}{4}\end{aligned}$$

$(3)\Leftrightarrow z^2-z+1=0\quad(3')$

$(3')$ est une équation du second degré à coefficients réels de discriminant réduit $\Delta'=-3$.

Les racines de $(3')$ sont $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

On peut vérifier ces résultats avec la calculatrice.

$$\begin{aligned}(4)&\Leftrightarrow z\left(\mathrm{i}\overline{z}+3\right)=0\\ &\Leftrightarrow z=0\ \text{ ou }\ \mathrm{i}\overline{z}+3=0\quad\text{(« équation produit nul »)}\\ &\Leftrightarrow z=0\ \text{ ou }\ \overline{z}=-\frac{3}{\mathrm{i}}\\ &\Leftrightarrow z=0\ \text{ ou }\ \overline{z}=3\mathrm{i}\\ &\Leftrightarrow z=0\ \text{ ou }\ z=-3\mathrm{i}\end{aligned}$$

III.

On pose $Z=(x+1+\text{i}y)(x-1-\text{i}y)$ où x et y sont deux nombres réels.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

$\text{Re}\, Z = x^2+y^2-1$	$\text{Im}\, Z = -2y$

$$\begin{aligned} Z &= (x+1+\text{i}y)(x-1-\text{i}y) \\ &= \left[(x+1)+\text{i}y\right]\left[(x-1)-\text{i}y\right] \\ &= (x+1)(x-1)+y^2+\text{i}y(x-1)-\text{i}y(x+1) \quad \text{(développer intelligemment)} \\ &= x^2+y^2-1-2\text{i}y \end{aligned}$$

Donc la partie réelle de Z est égale à x^2+y^2-1 et la partie imaginaire de Z est égale à $-2y$.

IV.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $z_\text{A}=\text{i}\sqrt{3}-1$ et B le point d'affixe $z_\text{B}=\left(\overline{z_\text{A}}\right)^2$.
Démontrer que B est le symétrique de O par rapport à A. On attend une justification rapide.

$$\begin{aligned} z_\text{B} &= \left(\overline{z_\text{A}}\right)^2 \\ &= \left(\overline{\text{i}\sqrt{3}-1}\right)^2 \\ &= \left(-\text{i}\sqrt{3}-1\right)^2 \\ &= \left(\text{i}\sqrt{3}+1\right)^2 \\ &= -2+2\text{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

On a alors $z_\text{B}=2z_\text{A}$.

On peut donc écrire $z_{\overrightarrow{\text{OB}}}=2z_{\overrightarrow{\text{OA}}}$. Par suite, $\overrightarrow{\text{OB}}=2\overrightarrow{\text{OA}}$.
On en déduit que B est le symétrique de O par rapport à A.

V.

Pour tout nombre complexe z distinct de -1, on pose $z'=\dfrac{\text{i}z}{z+1}$.

1°) On pose $z=x+\text{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $(x\,;\,y)\neq(-1\,;\,0)$.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
Il est demandé de ne pas développer les dénominateurs.

Donner les réponses dans le cadre au verso et détailler les calculs sur les lignes en dessous.
On pourra se contenter de donner seulement les grandes étapes de calcul. Tirer les traits de fractions à la règle.

$\text{Re}\, z' = -\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$	$\text{Im}\, z' = \dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\text{i}z}{z+1} \\ &= \frac{\text{i}(x+\text{i}y)}{x+\text{i}y+1} \\ &= \frac{\text{i}x-y}{(x+1)+\text{i}y} \\ &= \frac{(\text{i}x-y)\left[(x+1)-\text{i}y\right]}{\left[(x+1)+\text{i}y\right]\times\left[(x+1)-\text{i}y\right]} \\ &= \frac{\text{i}x(x+1)+xy-y(x+1)+\text{i}y^2}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{-y+\text{i}\left(x^2+y^2+x\right)}{(x+1)^2+y^2} \end{aligned}$$

Donc $\text{Re}\, z' = -\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$ et $\text{Im}\, z' = \dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$.

2°) On se place dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe $z\neq-1$ tels que z' soit réel.

On rédigera ainsi la recherche (modèle à recopier ; ne rien écrire dans le cadre) :

> Soit M un point quelconque de P d'affixe $z\neq-1$.
> On pose $z=x+\text{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $(x\,;\,y)\neq(-1\,;\,0)$.
>
> $\text{M}\in E \Leftrightarrow z'$ réel
> $\Leftrightarrow$ ………………….
> $\Leftrightarrow$ ………………….
> $\Leftrightarrow$ ………………….

On conclura de la manière suivante : « L'ensemble E est ……………………………………………………… ».

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq -1$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $(x\,;\,y) \neq (-1\,;\,0)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow z' \text{ réel} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im} z' = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 \neq (-1\,;\,0) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4} \\ (x+1)^2 + y^2 \neq (-1\,;\,0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

La relation $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ s'écrit aussi $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$.

C'est donc une équation du cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

Conclusion :

L'ensemble E est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ privé du point $\mathrm{A}(-1)$.