TS1 spécialité

Contrôle du mercredi 12 octobre 2016 (50 minutes)

Prénom : …………………… **Nom : ………………………………** **Note : …. / 20**

I. (4 points)

Dans la division euclidienne d'un entier relatif par 69, le reste est 35.
Dans la division euclidienne de ce même nombre par 75, le quotient est le même et le reste est 17.
Quel est ce nombre ?

On rédigera le début de la recherche sur le modèle suivant à recopier.
« Soit n l'entier cherché. On note q le quotient de la division euclidienne de n par 69 ».
On rédigera la fin de la recherche en faisant une phrase de conclusion sur le modèle : « L'entier cherché est … ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (6 points : 3 points + 3 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $a = n^2 + 1$ et $b = 2n$.

À l'aide de la calculatrice, conjecturer le reste de la division euclidienne de a par b suivant la parité de n.
On rédigera sur le modèle suivant à recopier et compléter (ne rien écrire).

• Si n est pair, il semble que le reste de la division euclidienne de a par b est égal à ……….. .

• Si n est impair, il semble que le reste de la division euclidienne de a par b est égal à ……….. .

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Le but de l'exercice est de démontrer que la conjecture est vraie.
Dans chaque cas, on attend une rédaction précise et concise en utilisant les phrases suivantes.
« Dans ce cas, on a : $a =$ .... et $b =$ .... » ; « On peut écrire $a =$ ....$\times$.........$+$.......... . »

• 1er cas : On suppose que n est pair. On pose alors $n = 2k$ où k est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

• 2e cas : On suppose que n est impair. On pose alors $n = 2k + 1$ où k est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

………………… (une seule réponse sans égalité)

IV. (1 point)

Déterminer à l'aide de la calculatrice un entier naturel a tel que le reste de la division euclidienne de $43a$ par 27 soit égal à 1.

………………… (une seule réponse sans égalité)

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel. Il n'est pas demandé de le programmer sur calculatrice. On précise que les variables n, r et a sont des entiers.

Entrée :
Saisir n

Traitement :
r prend pour valeur le reste de la division euclidienne de n par 9
Si $r \neq 0$
  Alors a prend la valeur $3r$
  Sinon a prend la valeur 9
FinSi

Sortie :
Afficher a

Les trois questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Quel nombre obtient-on en sortie si le nombre n saisi en entrée est – 2016 ?

………………… (une seule réponse sans égalité et sans faire de phrase)

2°) Donner un entier strictement négatif tel que le nombre affiché en sortie est 6.

………………… (une seule réponse sans égalité et sans faire de phrase)

3°) Quelles sont les valeurs possibles de a affichées en sortie ? Répondre sans justifier et sans faire de phrase.

……………………………………………………………………………………………………

VI. (4 points)

Dans la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b non nul, le quotient est q et le reste est r. Si on augmente le dividende de 5, le quotient augmente de 3 et le reste diminue de 1.
Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) de r ?
On attend une rédaction précise et concise en utilisant les phrases suivantes.

L'égalité de la division euclidienne de a par b s'écrit ……….. (1) avec la condition ………………….. .

L'égalité de la division euclidienne de … par b s'écrit ……….. (2) avec la condition ………………….. .

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 12-10-2016

I.

Dans la division euclidienne d'un entier relatif par 69, le reste est 35.
Dans la division euclidienne de ce même nombre par 75, le quotient est le même et le reste est 17.
Quel est ce nombre ?

On rédigera le début de la recherche sur le modèle suivant à recopier.
« Soit n l'entier cherché. On note q le quotient de la division euclidienne de n par 69 ».
On rédigera la fin de la recherche en faisant une phrase de conclusion sur le modèle : « L'entier cherché est … ».

Soit n l'entier cherché.
On note q le quotient de la division euclidienne de n par 69.

Les égalités des divisions euclidiennes de n par 69 et 35 permettent d'écrire les égalités :
$n=69q+35 \ (1)$ et $n=75q+17 \ (2)$.

(1) et (2) donnent alors : $69q+35=75q+17$ d'où $6q=18$ soit $q=3$.

L'égalité (1) donne alors $n=69\times3+35=242$.

L'entier cherché est 242.

II.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $a=n^2+1$ et $b=2n$.

À l'aide de la calculatrice, conjecturer le reste de la division euclidienne de a par b suivant la parité de n.
On rédigera sur le modèle suivant à recopier et compléter (ne rien écrire).

• Si n est pair, il semble que le reste de la division euclidienne de a par b est égal à ……….. .

• Si n est impair, il semble que le reste de la division euclidienne de a par b est égal à ……….. .

• Si n est pair, il semble que le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 1.

• Si n est impair, il semble que le reste de la division euclidienne de a par b est égal à $n+1$.

Sur calculatrice, on obtient le tableau suivant qui permet d'émettre la conjecture.

On rentre $\mathrm{Y1}=\mathrm{remainder}\left(\mathrm{X}^2+1, 2\mathrm{X}\right)$ ou $\mathrm{Y1}=\mathrm{X}^2+1-\mathrm{partEnt}\left(\left(\mathrm{X}^2+1\right)/2\mathrm{X}\right)*2\mathrm{X}$.
On règle la table de sorte qu'elle commence à 1 avec un pas de 1.

n	Reste de la division euclidienne de n^2+1 par $2n$
1	0
2	1
3	4
4	1
5	6
6	1
7	8
8	1
9	10
10	1
11	12
12	1
13	14
14	1
15	16
16	1
17	18
18	1
19	20
20	1
21	22
22	1
23	24
24	1
25	26
26	1
27	28
28	1
29	30
30	1
31	32

Le but de l'exercice est de démontrer que la conjecture est vraie.
Dans chaque cas, on attend une rédaction précise et concise en utilisant les phrases suivantes.
« Dans ce cas, on a : $a=$..................... et $b=$...................... » ; « On peut écrire $a=$.........$\times$.........$+$.......... . »

On travaille avec des égalités.

• 1^{er} cas : On suppose que n est pair. On pose alors $n = 2k$ où k est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Dans ce cas, on a : $a = 4k^2 + 1$ et $b = 4k$.
On peut écrire : $a = kb + 1 \quad (1)$.

Pour justifier que l'égalité (1) correspond à la division euclidienne de a par b, on doit donner deux arguments :
argument sur la nature des nombres autres que a et b (il doit s'agir d'entiers naturels) ;
argument sur le reste qui doit être strictement inférieur au diviseur.

L'égalité (1) ne fait intervenir que des entiers naturels.

On a : $1 < b$ car $k \geqslant 1$ par hypothèse d'où $4k \geqslant 4$.
On peut aussi dire que $n \geqslant 2$ par hypothèse. Or $b = 2n$ d'où $b \geqslant 4$ et a fortiori, $b > 1$.

D'après ce qui précède, l'égalité (1) traduit donc la division euclidienne de a par b.
On peut donc affirmer que dans la division euclidienne de a par b, le quotient est k et le reste est 1.

• 2^e cas : On suppose que n est impair. On pose alors $n = 2k + 1$ où k est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Dans ce cas, on a : $a = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ et $b = 4k + 2$.

On va faire une réécriture du deuxième membre de l'égalité $a = ...$ de manière à introduire b de sorte que l'on puisse écrire une égalité de division euclidienne.

On peut écrire : $a = 4k^2 + 2k + 2k + 2$ soit $a = k(4k+2) + 2k + 2$ ou encore $a = kb + 2k + 2 \quad (2)$.
On a : $2k + 2 < 4k + 2$ car $k > 0$ par hypothèse.

L'égalité (2) ne fait intervenir que des entiers naturels.

On a : $2k + 2 < 4k + 2$ car $k > 0$ par hypothèse.

D'après ce qui précède, l'égalité (2) traduit donc la division euclidienne de a par b.
On peut donc affirmer que dans la division euclidienne de a par b, le quotient est k et le reste est $2k + 2$ (c'est-à-dire $n + 1$).

Cet exercice a été moins bien réussi pour la partie démonstration de la conjecture (absence de justifications).

III.

Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

383 (une seule réponse sans égalité)

Soit n le nombre de jetons de Zoé.

« Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. »
La division euclidienne de n par 17 donne un reste de 9.

« Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. »
La division euclidienne de n par 5 donne un reste de 3.

On cherche donc l'entier compris entre 300 et 400 dont le reste dans la division euclidienne par 17 est égal à 9 et dont le reste dans la division euclidienne par 5 est égal à 3.

On utilise la calculatrice. On rentre deux « fonctions » permettant d'obtenir le reste par 17 et par 9 des entiers naturels.

On regarde ensuite dans la table les images des entiers naturels compris entre 300 et 400.

On rentre les fonctions :
$\mathrm{Y}_1 = \mathrm{remainder}(\mathrm{X}, 17)$ ou $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{X} - \mathrm{partEnt}(\mathrm{X}/17) * 17$.
$\mathrm{Y}_2 = \mathrm{remainder}(\mathrm{X}, 5)$ ou $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{X} - \mathrm{partEnt}(\mathrm{X}/5) * 5$.

On règle la table de sorte qu'elle commence à 300 avec un pas de 1.
Il faut chercher un peu pour trouver la valeur 383.

IV.

Déterminer à l'aide de la calculatrice un entier naturel a tel que le reste de la division euclidienne de $43a$ par 27 soit égal à 1.

22 (une seule réponse sans égalité)

On utilise la calculatrice. On rentre la « fonction » permettant d'obtenir le reste de la division euclidienne de $43x$ par 27 pour x entier naturel.
On regarde ensuite dans la table. Le premier nombre qui donne une image égale à 1 est 22.

V.

On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel. Il n'est pas demandé de le programmer sur calculatrice. On précise que les variables *n*, *r* et *a* sont des entiers.

```
Entrée :
Saisir n

Traitement :
r prend pour valeur le reste de la division euclidienne de n par 9
Si r ≠ 0
    Alors a prend la valeur 3r
    Sinon a prend la valeur 9
FinSi

Sortie :
Afficher a
```

Les trois questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) Quel nombre obtient-on en sortie si le nombre *n* saisi en entrée est – 2016 ?

9 (une seule réponse sans égalité et sans faire de phrase)

Le nombre – 2016 est divisible par 9 car la somme des chiffres de 2016 est divisible par 9.
Le reste de la division euclidienne de – 2016 par 9 est donc 0 donc *a* prend la valeur 9.

2°) Donner un entier strictement négatif tel que le nombre affiché en sortie est 6.

– 7 (une seule réponse sans égalité et sans faire de phrase)

Il suffit de donner un entier relatif dont le reste de la division euclidienne par 9 est égal à 2.
Or les entiers relatifs dont le reste de la division euclidienne par 9 est égal à 2 sont les entiers relatifs de la forme $9k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Comme on doit donner un entier négatif, on choisit une valeur de *k* qui donne un résultat négatif. On peut par exemple prendre $k=-1$ qui donne – 7 ou toute autre valeur de *k* inférieure ou égale à – 1.

3°) Quelles sont les valeurs possibles de *a* affichées en sortie ? Répondre sans justifier et sans faire de phrase.

3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24

Les valeurs possibles de *r* sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (puisqu'il s'agit du reste dans la division euclidienne par 9).
Dans le cas où le reste est différent de 0, il est multiplié par 3.
Dans le cas où le reste est égal à 9, il est remplacé par 9.

VI.

Dans la division euclidienne d'un entier naturel *a* par un entier naturel *b* non nul, le quotient est *q* et le reste est *r*. Si on augmente le dividende de 5, le quotient augmente de 3 et le reste diminue de 1.
Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) de *r* ?
On attend une rédaction précise et concise en utilisant les phrases suivantes.

L'égalité de la division euclidienne de *a* par *b* s'écrit ……….. (1) avec la condition ………………….. .

L'égalité de la division euclidienne de … par *b* s'écrit ……….. (2) avec la condition ………………….. .

L'égalité de la division euclidienne de *a* par *b* s'écrit $a=bq+r$ (1) avec la condition $0 \leqslant r < b$.

L'égalité de la division euclidienne de $a+5$ par *b* s'écrit $a+5=b(q+3)+r-1$ (2) avec la condition $0 \leqslant r-1 < b$.

En développant le deuxième membre de l'égalité (2), on obtient immédiatement $a=bq+3b+r-6$ $(2')$.

Compte tenu de (1), $(2')$ permet d'écrire $bq+r=bq+3b+r-6$ d'où $3b=6$ ce qui donne $b=2$.

On reprend alors les conditions sur *r* associées aux égalités (1) et (2) en remplaçant *b* par 2 : $0 \leqslant r < 2$ et $0 \leqslant r-1 < 2$.

La dernière inégalité donne $1 \leqslant r < 3$.

Comme *r* est un entier, on en déduit que $r=1$.