1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 11 octobre 2016 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (2 points)

On pose $A=20-3\left(1+\sqrt{2}\right)^3$.

Calculer sans la calculatrice la valeur exacte sous la forme $a+b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers.
Écrire très lisiblement et sans ratures le détail des calculs sur les lignes ci-dessous.

………………………………………… (une seule égalité)

……

……

……

……

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un réel.
- Calculer sa valeur absolue.
- Ajouter 1.
- Prendre la racine carrée du résultat.

1°) On note x le réel choisi au départ et y le réel obtenu à la fin du programme de calcul.
Exprimer y en fonction de x.

………………………………………… (une seule égalité)

2°) Pour quelle(s) valeur(s) du nombre de départ le résultat final est-il égal à 2 ?
Répondre sans faire de phrase ni écrire d'égalité après recherche au brouillon.

……………………………………..

III. (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left|x^2-1\right|=\left|2x^2-3\right| \quad (1)$.

On commencera la rédaction en écrivant : « (1) est successivement équivalente à ».

On achèvera la résolution en écrivant : « Soit S l'ensemble des solutions de (1) » puis l'égalité d'ensembles $S=$........ .

……

……

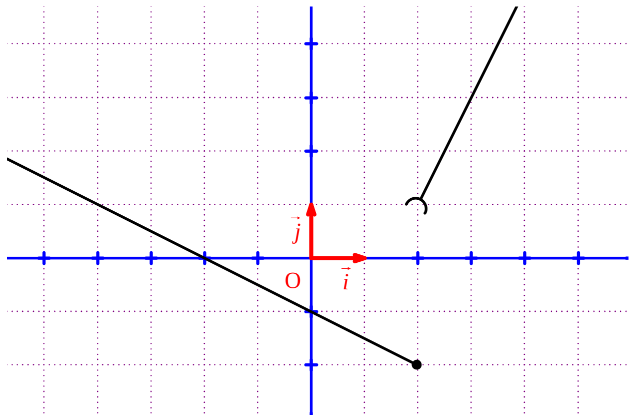
……

……

……

IV. (2 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique, constituée de deux demi-droites dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, est donnée sur le graphique ci-contre (ne rien écrire sur celui-ci).



Déterminer graphiquement l'expression de f suivant les valeurs de x en rédigeant sur le modèle ci-dessous (à recopier et compléter ; ne rien écrire dans le cadre).

- Si $x\in$............, alors $f(x)=$........................ .
- Si $x\in$............, alors $f(x)=$........................ .

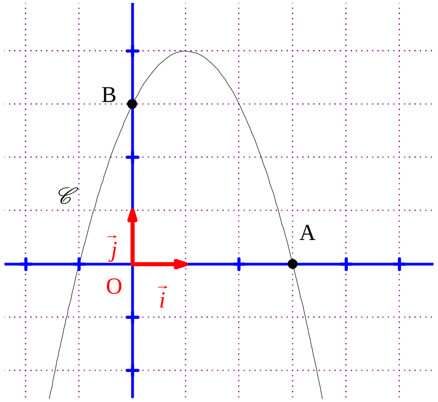
……

……

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y=-x^2+2x+3$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

On note A et B les points d'intersection de $\mathscr{C}$ respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



1°) Compléter les phrases suivantes à l'aide d'intervalles ou de réunions d'intervalles donnant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (AB).

• $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de (AB) sur ……………..…… .

• $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de (AB) sur ……………..…… .

• $\mathscr{C}$ et (AB) sont sécantes aux points A et B. *Il n'y a rien à compléter pour cette dernière phrase.*

2°) Hachurer sur le graphique ci-dessus l'ensemble *E* des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient la double inégalité $3-x \leqslant y \leqslant -x^2+2x+3$.

VI. (3 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3 respectivement des équations (1) et (2) et de l'inéquation (3) suivantes (recherche au brouillon) : $\dfrac{11-\sqrt{x}}{3}=2 \quad (1) \quad ; \quad \sqrt{2x}=3 \quad (2) \quad ; \quad \sqrt{x}\leqslant 9 \quad (3)$.

$S_1=$ …………………………………	$S_2=$ …………………………………	$S_3=$ …………………………………

VII. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3-2\left|x-1\right|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exprimer $f(x)$ sans barres de valeurs absolues suivant les valeurs de x.

On ne demande pas de justifier. On donnera uniquement le(s) résultat(s) sous forme simplifiée.

………

………

………

………

VIII. (1 point)

Déterminer le meilleur encadrement possible de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ où x est un réel quelconque tel que $x \geqslant 4$.

On attend une double inégalité sous la forme ...... $\square$ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\square$ ...... où les pointillés seront remplacés par des nombres et les $\square$ par les symboles $<$ ou $\leqslant$.

……………………………………………………………………

IX. (2 points)

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$.

Le déterminant du système est égal à …….. .

Le déterminant est non nul donc le système admet ………………………………………………………… .

Pour obtenir le couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 2x+3y=-1 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix} \right. \qquad \left| \begin{matrix} \times \\ \times \end{matrix} \right.$$

$\begin{cases} \text{…………….} = \text{…………….} \\ \text{…………….} = \text{…………….} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{…………….} = \text{…………….} \\ \text{…………….} = \text{…………….} \end{cases}$

Le couple solution du système est : ……………….. .

Question bonus sur 1 point à ne traiter que si tout le reste a été fait et qu'il reste du temps :

On reprend le programme de calcul de l'exercice **II**.
Justifier que le nombre obtenu en sortie est toujours supérieur ou égal à 1.

………

………

Corrigé du contrôle du 11-10-2016

Le barème est sur 21 (22 avec le bonus).

I.

On pose $A = 20 - 3\left(1+\sqrt{2}\right)^3$.

Calculer sans la calculatrice la valeur exacte sous la forme $a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers.
Écrire très lisiblement et sans ratures le détail des calculs sur les lignes ci-dessous.

$$A = -1 - 15\sqrt{2} \text{ (une seule égalité)}$$

$$A = 20 - 3\left(1^3 + 3\times 1^2 \times \sqrt{2} + 3\times 1 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3\right)$$

$$= 20 - \left(1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2}\right)$$

$$= 20 - 3\left(7 + 5\sqrt{2}\right)$$

$$= -1 - 15\sqrt{2}$$

On vérifie éventuellement le résultat sur la calculatrice.

II.

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un réel.
- Calculer sa valeur absolue.
- Ajouter 1.
- Prendre la racine carrée du résultat.

1°) On note x le réel choisi au départ et y le réel obtenu à la fin du programme de calcul.
Exprimer y en fonction de x.

$$y = \sqrt{|x| + 1} \text{ (une seule égalité)}$$

2°) Pour quelle(s) valeur(s) du nombre de départ le résultat final est-il égal à 2 ?
Répondre sans faire de phrase ni écrire d'égalité après recherche au brouillon.

3 et -3

On cherche les valeurs de x telles que $y = 2 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$|x| + 1 = 4$

$|x| = 3$

$x = 3$ ou $x = -3$

III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left|x^2 - 1\right| = \left|2x^2 - 3\right| \quad (1)$.

On commencera la rédaction en écrivant : « (1) est successivement équivalente à ».

On achèvera la résolution en écrivant : « Soit S l'ensemble des solutions de (1) » puis l'égalité d'ensembles $S = ...$.

(1) est successivement équivalente à :

$x^2 - 1 = 2x^2 - 3$ ou $x^2 - 1 = -2x^2 + 3$ (règle du cours : $|a| = |b|$ si et seulement si …)

$x^2 = 2$ ou $3x^2 = 4$

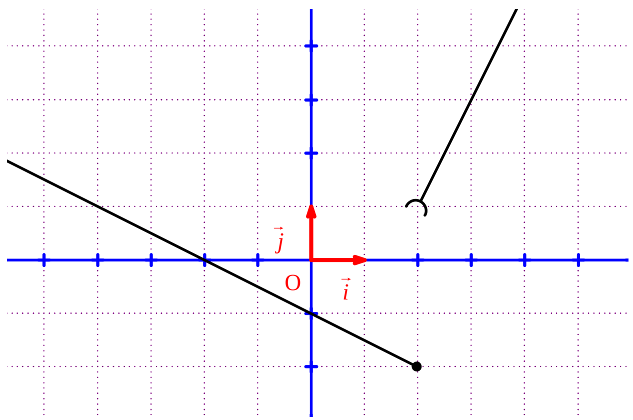
$x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$$S = \left\{\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{2}\,;\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,;\,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$$

IV.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique, constituée de deux demi-droites dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, est donnée sur le graphique ci-contre (ne rien écrire sur celui-ci).



Déterminer graphiquement l'expression de f suivant les valeurs de x en rédigeant sur le modèle ci-dessous (à recopier et compléter ; ne rien écrire dans le cadre).

- Si $x \in$............, alors $f(x) =$......................... .
- Si $x \in$............, alors $f(x) =$......................... .

• Si $x \in \left]-\infty\,;2\right]$, alors $f(x) = -\dfrac{x}{2} - 1$.

• Si $x \in \left]2\,;+\infty\right[$, alors $f(x) = 2x - 3$.

L'expression de *f* sur l'intervalle $\left]2\,;+\infty\right[$ est un peu moins évidente à trouver que sur l'intervalle $\left]-\infty\,;2\right]$.

Notons *D* la droite qui est le support de la demi-droite correspondante à la représentation graphique de *f* sur l'intervalle $\left]2\,;+\infty\right[$.

On arrive bien à lire graphiquement le coefficient directeur de *D* : 2.

En revanche, il n'est pas facile de lire graphiquement l'ordonnée à l'origine de *D*. Il n'est pas très satisfaisant de prolonger la demi-droite sur le graphique.

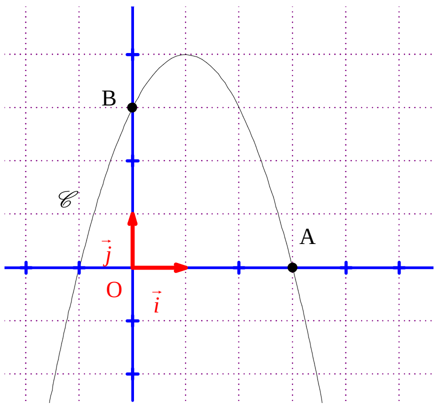
Il est préférable de dire que *D* passe par le point $\text{A}(2\,;1)$ [ou $\text{B}(3\,;3)$].

Ainsi, *D* a pour équation $y = 2(x-2)+1$ soit $y = 2x - 3$ (formule $y = m(x - x_{\text{A}}) + y_{\text{A}}$).

V.

Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y = -x^2 + 2x + 3$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

On note A et B les points d'intersection de $\mathscr{C}$ respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.



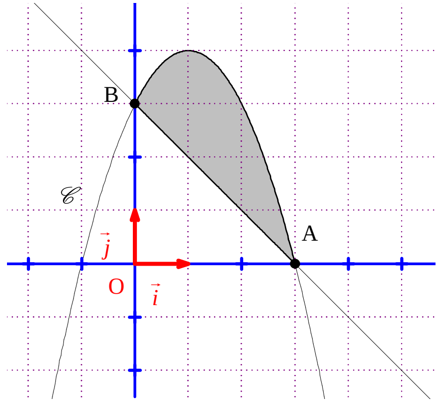
1°) Compléter les phrases suivantes à l'aide d'intervalles ou de réunions d'intervalles donnant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (AB).

• $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de (AB) sur $\left]0\,;3\right[$.

• $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de (AB) sur $\left]-\infty\,;0\right[\cup \left]3\,;+\infty\right[$.

• $\mathscr{C}$ et (AB) sont sécantes aux points A et B. *Il n'y a rien à compléter pour cette dernière phrase.*

2°) Hachurer sur le graphique ci-dessus l'ensemble *E* des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient la double inégalité $3 - x \leqslant y \leqslant -x^2 + 2x + 3$.



On constate aisément par lecture graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine que la droite (AB) a pour équation $y = 3 - x$.

VI.

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3 respectivement des équations (1) et (2) et de l'inéquation (3) suivantes (recherche au brouillon) : $\dfrac{11-\sqrt{x}}{3} = 2$ (1) ; $\sqrt{2x} = 3$ (2) ; $\sqrt{x} \leqslant 9$ (3).

$S_1 = \{\,25\,\}$	$S_2 = \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$	$S_3 = [0\,;81]$

On résout toutes les équations et l'inéquation dans l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

(1) est successivement équivalente à :

$11 - \sqrt{x} = 6$ (produit en croix)

$\sqrt{x} = 5$ (produit en croix)

$x = 25$

(2) est successivement équivalente à :

$2x = 9$

$x = \dfrac{9}{2}$

(3) est équivalente à $x \leqslant 81$

On obtient l'ensemble S_3 en tenant compte de la condition $x \geqslant 0$.

VII.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3-2\left| x-1 \right|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exprimer $f\left(x\right)$ sans barres de valeurs absolues suivant les valeurs de *x*.
On ne demande pas de justifier. On donnera uniquement le(s) résultat(s) sous forme simplifiée.

On doit discuter sur le signe de l'expression (ici $x-1$) située entre les barres de valeur absolue.
Cette expression s'annule pour $x=1$ (« valeur charnière »).

Si $x \geqslant 1$, alors $x-1 \geqslant 0$. Dans ce cas, $f\left(x\right)=3-2\left| x-1 \right|=3-2\left(x-1\right)=5-2x$.

Si $x \leqslant 1$, alors $x-1 \leqslant 0$. Dans ce cas, $f\left(x\right)=3-2\left| x-1 \right|=3-2\left(-x+1\right)=2x+1$.

VIII.

Déterminer le meilleur encadrement possible de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ où *x* est un réel quelconque tel que $x \geqslant 4$.

On attend une double inégalité sous la forme ......$\boxed{}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\boxed{}$...... où les pointillés seront remplacés par des nombres et les $\boxed{}$ par les symboles $<$ ou $\leqslant$.

$$0<\frac{1}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{2}$$

On peut aussi faire un raisonnement algébrique comme suit.

Comme $x \geqslant 4$, alors $\sqrt{x} \geqslant 2$ car la fonction « racine carrée » est croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

Par suite, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{2}$ $\left(1\right)$ car la fonction « inverse » est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

Par ailleurs, $\sqrt{x}>0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$ $\left(2\right)$.

$\left(1\right)$ et $\left(2\right)$ donnent alors $0<\dfrac{1}{\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

IX.

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}3x-4y=5\\2x+3y=-1\end{cases}$.

Le déterminant du système est égal à 17.

Le déterminant est non nul donc le système admet un unique couple solution.

Pour obtenir le couple solution, on utilise les multiplicateurs placés à droite du système :

$$\begin{cases}3x-4y=5\\2x+3y=-1\end{cases}\left|\begin{matrix}\times 3\\ \times 4\end{matrix}\right|\begin{matrix}\times\left(-2\right)\\ \times 3\end{matrix}$$

$$\begin{cases}17x=11\\17y=-13\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{11}{17}\\[2mm] y=-\dfrac{13}{17}\end{cases}$$

Le couple solution du système est : $\left(\dfrac{11}{17}\,;-\dfrac{13}{17}\right)$.

On vérifie que l'on ne s'est pas trompé en utilisant le solveur de systèmes linéaires de la calculatrice.

Question bonus sur 1 point à ne traiter que si tout le reste a été fait et qu'il reste du temps :

On reprend le programme de calcul de l'exercice **II**.
Justifier que le nombre obtenu en sortie est toujours supérieur ou égal à 1.

Pour tout réel *x*, on a : $\left| x \right| \geqslant 0$ car le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul.

Donc pour tout réel *x*, on a : $\left| x \right|+1 \geqslant 1$.

Par suite, $\sqrt{\left| x \right|+1} \geqslant 1$ car la fonction « racine carrée » est croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

Conclusion : Pour tout réel *x*, on a : $y \geqslant 1$.