TS1

Contrôle du vendredi 7 octobre 2016 (50 min)

Prénom et nom : ………………………………………..…………

Note : ……../ 20

I. (4 points)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = \mathrm{i}$ et telle que pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = 1-(1+\mathrm{i})\overline{z_n}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $z_n = \mathrm{i}$.

On apportera un très grand soin à la rédaction et à la présentation.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3 - \dfrac{5}{(2x+1)^3}$.

Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \quad f'(x) =$ ………………………………… (un seul résultat)

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme d'un quotient dont le numérateur est factorisé.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\} \quad f'(x) =$ …………………………………

2°) Donner les valeurs de x pour lesquelles f' s'annule.

On écrira les valeurs sur une seule ligne sans faire de phrase et sans égalités.

…………………………………………………………………………

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Pour tout réel $m > 0$, on considère la fonction $f_m : x \mapsto x\sqrt{x^2+m}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_m'(x)$. On donnera le résultat sous forme simplifiée d'un seul quotient. Écrire le détail du calcul sur lignes ci-dessous.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_m'(x) =$ ....

....

....

....

....

....

....

2°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_m$ au point O ?

…………………. (un seul résultat sous forme simplifiée)

3°) Dans cette question, on prend $m = 3$.
Compléter la phrase suivante après avoir effectué les calculs au brouillon.

La tangente à $\mathcal{C}_3$ au point A d'abscisse 1 a pour équation réduite ……………………………… .

V. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) =$ .... (un seul résultat) ; $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f''(x) =$ .... (un seul résultat)

VI. (2 points)

Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto x + \dfrac{4}{x-2}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$ sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

....

....

....

....

....

....

....

....

VII. (2 points)

On considère les fonctions $u : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{2}$ et $v : x \mapsto 2-4x$ définies sur $\mathbb{R}$.

On note f la composée de u suivie de v (autrement dit : $f = v \circ u$).

Exprimer $f(x)$ en fonction de x (une seule expression sous forme simplifiée).

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) =$ ....

Écrire le détail du calcul sur lignes ci-dessous.

....

....

....

....

Corrigé du contrôle du 7-10-2016

I.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = \mathrm{i}$ et telle que pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = 1-(1+\mathrm{i})\overline{z_n}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $z_n = \mathrm{i}$.
On apportera un très grand soin à la rédaction et à la présentation.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $z_n = \mathrm{i}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$z_0 = \mathrm{i}$ par définition de la suite.
D'où $P(0)$ est vraie de manière évidente.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $z_k = \mathrm{i}$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $z_{k+1} = \mathrm{i}$.

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= 1-(1+\mathrm{i})\overline{z_k} \\ &= 1-(1+\mathrm{i})\overline{\mathrm{i}} \\ &= 1-(1+\mathrm{i})\times(-\mathrm{i}) \\ &= 1+\mathrm{i}-1 \\ &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

On en déduit que la phrase $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3-\dfrac{5}{(2x+1)^3}$.

Calculer $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\} \qquad f'(x) = \frac{30}{(2x+1)^4} \qquad \text{(un seul résultat)}$$

Pour dériver rapidement f, on effectue la réécriture $f(x) = 3-5\times\dfrac{1}{(2x+1)^3}$.

On applique la formule de dérivation : $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme d'un quotient dont le numérateur est factorisé.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\} \qquad f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\} \qquad f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-1)-x^3\times 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\} \qquad f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-1)-x^3\times 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2(3x^2-3-2x^2)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

2°) Donner les valeurs de x pour lesquelles f' s'annule.
On écrira les valeurs sur une seule ligne sans faire de phrase et sans égalités.

$$0\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{3}$$

<u>/!\</u> Les valeurs 1 et – 1 sont des valeurs d'annulation du dénominateur de $f'(x)$. Ce sont donc des valeurs interdites.
Ce ne sont pas des valeurs d'annulation de $f'(x)$.

IV.

Pour tout réel $m>0$, on considère la fonction $f_m : x \mapsto x\sqrt{x^2+m}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f_m'(x)$. On donnera le résultat sous forme simplifiée d'un seul quotient. Écrire le détail du calcul sur lignes ci-dessous.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_m'(x) = \frac{2x^2+m}{\sqrt{x^2+m}}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_m'(x) = \sqrt{x^2+m} + x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+m}}$ (sous-dérivée expliquée ci-dessous)

$$= \sqrt{x^2+m} + x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+m}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+m}\right)^2 + x^2}{\sqrt{x^2+m}}$$

$$= \frac{x^2+m+x^2}{\sqrt{x^2+m}}$$

$$= \frac{2x^2+m}{\sqrt{x^2+m}}$$

Il faut vraiment « quantifier » chaque calcul de dérivée en commençant le calcul par « $\forall x \in \mathbb{R}$ ».

On notera que la dérivée nécessaire au calcul de la drivée de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2+m}$ est la fonction u' définie par $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+m}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+m}}$.

On laisse la racine carrée au dénominateur.

2°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_m$ au point O ?

$\sqrt{m}$ (un seul résultat sous forme simplifiée)

$$f_m'(0) = \frac{2\times 0^2+m}{\sqrt{0^2+m}}$$

$$= \frac{m}{\sqrt{m}}$$

$$= \frac{\sqrt{m}\times\cancel{\sqrt{m}}}{\cancel{\sqrt{m}}}$$

$$= \sqrt{m}$$

3°) Dans cette question, on prend $m=3$.
Compléter la phrase suivante après avoir effectué les calculs au brouillon.

La tangente à $\mathcal{C}_3$ au point A d'abscisse 1 a pour équation réduite $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_3(x) = x\sqrt{x^2+3}$ (expression de la fonction f_3)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_3'(x) = \frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$ (expression de la dérivée de la fonction f_3)

$$f_3(1) = 1\times\sqrt{1^2+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$f_3'(1) = \frac{2\times 1^2+3}{\sqrt{1^2+3}} = \frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$$

On applique ensuite la formule $y = f_3'(1)(x-1) + f_3(1)$ qui donne $y = \frac{5}{2}(x-1)+2$ soit $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$.

On peut vérifier ce résultat grâce à la calculatrice en utilisant la commande de tracé d'une tangente de la calculatrice.

Une équation réduite de tangente est une équation réduite de droite et se présente sous la forme $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
Beaucoup d'élèves ont oublié d'écrire $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{3}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2}$ (un seul résultat) ; $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f''(x) = -\frac{6}{x^3}$ (un seul résultat)

Pour dériver rapidement *f*, on fait la réécriture suivante : $f(x)=\frac{1}{2}\times x-3\times\frac{1}{x}$.

Pour dériver rapidement f', on fait la réécriture suivante : $f'(x)=3\times\frac{1}{x^2}$.

VI.

Démontrer que la fonction F : $x \mapsto x+\frac{4}{x-2}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$ sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

On s'appuie sur la définition d'une primitive donnée.
Il n'y a qu'une méthode pour résoudre l'exercice au stade où nous en sommes. On « prend » la fonction F et on la dérive pour démontrer que sa dérivée est égale à *f*. On commence assez sèchement.

F est dérivable sur $]2\,;+\infty[$ car c'est une fonction rationnelle.

$\forall x \in]2\,;+\infty[\quad F'(x)=1-\frac{4}{(x-2)^2}$

$$=\frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$=f(x)$$

Il faut absolument quantifier le calcul de la dérivée de F en écrivant « $\forall x \in]2\,;+\infty[$ ».

On en déduit que F est une primitive de *f* sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

VII.

On considère les fonctions $u : x \mapsto \frac{1-x^2}{2}$ et $v : x \mapsto 2-4x$ définies sur $\mathbb{R}$.
On note *f* la composée de *u* suivie de *v* (autrement dit : $f=v\circ u$).
Exprimer $f(x)$ en fonction de *x* (une seule expression sous forme simplifiée).

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x)=$ ....

La fonction *f* est la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=v\left[u(x)\right]$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=v(X)$ avec $X=u(x)$

$$=2-4X$$

$$=2-4\times\frac{1-x^2}{2}$$

$$=2-2\left(1-x^2\right)$$

$$=2x^2$$