TS1 spécialité

Contrôle du jeudi 26 novembre 2015 (50 minutes)

Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

Note : …. / 20

Prénom : …………………………………… **Nom : ………………………………………………………**

I. (5 points)

Soit n un entier naturel quelconque.
Démontrer que le nombre $3^{3n}-3^{3n+4}+2$ est divisible par 13.

II. (5 points)

Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est donnée par $\text{N}=\overline{ab0a2}$ où a et b sont des entiers naturels tels que $1\leqslant a\leqslant 9$ et $0\leqslant b\leqslant 9$.
Déterminer toutes les écritures possibles de N sachant que N est divisible par 4 et par 9.
Répondre sans écrire d'égalités et sans faire de phrases.

III. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) a) 2 points ; b) 2 points)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1°) Démontrer que le nombre $\text{A}=2013^6+2014^6$ est divisible par 5 en utilisant les congruences.
Rédiger de la manière la plus concise possible.

2°)

a) Compléter le tableau de congruences suivant par des entiers naturels les plus petits possible.

$x \equiv \dots \ [5]$	0	1	2	3	4
$x^6 \equiv \dots \ [5]$					
$(x+1)^6 \equiv \dots \ [5]$					
$x^6 + (x+1)^6 \equiv \dots \ [5]$					

b) En déduire l'ensemble *E* des entiers relatifs *x* tels que $x^6 + (x+1)^6$ soit divisible par 5.
Rédiger une phrase de réponse selon le modèle suivant, à recopier et à compléter :
« L'ensemble *E* est l'ensemble des entiers relatifs …….. ».

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n + 6$.
On admettra que tous les termes de la suite sont des entiers naturels.

1°) Calculer les premiers termes de la suite au brouillon ou à l'aide de la calculatrice.
Que peut-on conjecturer sur le dernier chiffre de l'écriture décimale des termes de la suite ?
Répondre directement par une phrase.

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

2°) Proposer une manière de démontrer ce résultat. On ne demande pas de faire la démonstration.

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

……………………………………………………………………………………………………..….

Corrigé du contrôle du 26-11-2015

I.

Soit n un entier naturel quelconque.
Démontrer que le nombre $3^{3n}-3^{3n+4}+2$ est divisible par 13.

1ère méthode :

On a $3^3\equiv 1$ (mod. 13) donc $3^{3n}\equiv 1$ (mod. 13).
Par suite, $3^{3n+4}\equiv 3^4$ (mod. 13).

Or $3^4\equiv 3$ (mod. 13). Donc par transitivité, $3^{3n+4}\equiv 3$ (mod. 13).

D'où $3^{3n}-3^{3n+4}+2\equiv 1-3+2$ (mod. 13) soit $3^{3n}-3^{3n+4}+2\equiv 0$ (mod. 13).

On en déduit que $13 \mid 3^{3n}-3^{3n+4}+2$.

2e méthode :

On commence par transformer l'expression $3^{3n}-3^{3n+4}+2$ de manière à la réduire.

$$\begin{aligned}3^{3n}-3^{3n+4}+2&=3^{3n}\left(1-3^4\right)+2\\&=2-80\times 27^n\end{aligned}$$

On a : $80\equiv 2$ (mod. 13) et $27\equiv 1$ (mod. 13).

On obtient aisément : $3^{3n}-3^{3n+4}+2\equiv 0$ (mod. 13). D'où le résultat demandé.

II.

Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est donnée par $\text{N}=\overline{ab0a2}$ où a et b sont des entiers naturels tels que $1\leqslant a\leqslant 9$ et $0\leqslant b\leqslant 9$.
Déterminer toutes les écritures possibles de N sachant que N est divisible par 4 et par 9.
Répondre sans écrire d'égalités et sans faire de phrases.

15012 ; 31032 ; 56052 ; 72072 ; 97092

III.

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1°) Démontrer que le nombre $\text{A}=2013^6+2014^6$ est divisible par 5 en utilisant les congruences.
Rédiger de la manière la plus concise possible.

On a : $2013\equiv 3$ (mod. 5) donc $2013^6\equiv 3^6$ (mod. 5).
Or $3^6\equiv 4$ (mod. 5) donc $2013^6\equiv 4$ (mod. 5).

De même, on a $2014\equiv -1$ (mod. 5) donc $2014^6\equiv 1$ (mod. 5).

Donc $\text{A}\equiv 4+1$ (mod. 5).

Or $5\equiv 0$ (mod. 5).

D'où $\text{A}\equiv 0$ (mod. 5).

Par suite, A est divisible par 5.

2°)

a) Compléter le tableau de congruences suivant par des entiers naturels les plus petits possible.

$x\equiv\ldots$ [5]	0	1	2	3	4
$x^6\equiv\ldots$ [5]	0	1	4	4	1
$(x+1)^6\equiv\ldots$ [5]	1	4	4	1	0
$x^6+(x+1)^6\equiv\ldots$ [5]	1	0	3	0	1

b) En déduire l'ensemble E des entiers relatifs x tels que $x^6+(x+1)^6$ soit divisible par 5.
Rédiger une phrase de réponse selon le modèle suivant, à recopier et à compléter :
« L'ensemble E est l'ensemble des entiers relatifs …….. ».

L'ensemble E est l'ensemble des entiers relatifs dont le reste dans la division euclidienne par 5 est égal à 1 ou 3.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n + 6$.

On admettra que tous les termes de la suite sont des entiers naturels.

1°) Calculer les premiers termes de la suite au brouillon ou à l'aide de la calculatrice.
Que peut-on conjecturer sur le dernier chiffre de l'écriture décimale des termes de la suite ?
Répondre directement par une phrase.

D'après la calculatrice, il semble que le dernier chiffre de l'écriture décimale des termes de la suite soit 2.

2°) Proposer une manière de démontrer ce résultat. On ne demande pas de faire la démonstration.

On peut faire une démonstration par récurrence.