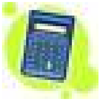
TS1

Contrôle du samedi 1er octobre 2016 (2 heures)



Prénom et nom : ………………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère le polynôme $P(z)=z^4-16z^3+90z^2-16z+89$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1°) Démontrer que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z^2+1)(z^2-16z+89)$.

………..

………..

2°) En déduire les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)$. On donnera les résultats sous forme algébrique simplifiée. Répondre par une phrase sans justifier.

………..

………..

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On pose $z=\sqrt{3}+\text{i}$.

1°) Calculer z^3.

………..

………..

………..

2°) Le nombre z^{2016} est-il réel ? Justifier brièvement.

………..

………..

………..

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On pose $Z=(x+1+\text{i}y)(\text{i}(x-1)-y)$ où x et y sont deux nombres réels.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y. On donnera les résultats sous forme simplifiée.

Re Z = …………………………….	Im Z = …………………………….

2°) On pose $Z'=\dfrac{\text{i}(x-1)-y}{x+1-\text{i}y}$ où x et y sont deux réels tels que $(x\,;\,y)\neq(-1\,;\,0)$.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z' en fonction de x et y.
On donnera les résultats sous forme simplifiée en laissant le dénominateur comme somme de deux carrés.

Re Z' = …………………………….	Im Z' = …………………………….

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0\in\mathbb{C}$ et telle que pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=1-(1+\text{i})\overline{z_n}$. On ne cherchera pas l'expression de z_n en fonction de n.

1°) Dans cette question, on suppose que $z_0=\text{i}$.
Que peut-on conjecturer pour la suite (z_n) dans ce cas ? Répondre par une phrase sans justifier.
Comment pourrait-on démontrer cette conjecture ? On ne demande pas de faire la démonstration.

………..

………..

………..

2°) Déterminer z_0 tel que $z_1=\overline{z_0}$.

………..

………..

………..

………..

3°) Déterminer z_0 tel que $z_2 = 4\text{i} - 3$.

……..

……..

……..

……..

4°) Exprimer, pour *n* entier naturel quelconque, z_{n+2} en fonction de z_n.

……..

……..

……..

……..

5°) Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note V le point d'affixe i.

Pour tout entier naturel *n*, on note M_n le point d'affixe z_n.

Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a $\overrightarrow{\text{VM}_{n+2}} = \alpha \overrightarrow{\text{VM}_n}$ où α est un réel (indépendant de *n*) à préciser.

……..

……..

……..

……..

V. (2 points)

On considère l'algorithme ci-contre. On précise que toutes les variables sont des entiers naturels.
On ne demande pas de le programmer sur calculatrice.
Faire fonctionner l'algorithme « à la main » lorsque la valeur de *n* saisie en entrée est 4.
Écrire les valeurs de *u* et *v* affichées en sortie (un seul résultat à chaque fois, sans égalité).

……………………….. ………………………..

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
u prend la valeur 2
v prend la valeur 1

Traitement :
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  a prend la valeur *u*
  u prend la valeur $u + v$
  v prend la valeur $a + 2v$
FinPour

Sortie :
Afficher *u* et *v*

VI. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}.$$

1°) Calculer « à la main » les premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$ ou « rentrer » la suite dans la calculatrice.
Conjecturer l'expression de u_n en fonction de *n*. On ne demande pas de justifier.
On répondra uniquement par une phrase sur le modèle suivant à recopier :
« On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n =$ .... ».

……..

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ (on admettra que pour tout entier naturel *n*, u_n est non nul).

En utilisant la suite $\left(v_n\right)$, démontrer que la conjecture émise au 1°) est vraie.

……..

……..

……..

……..

……..

Conseil donné à l’oral la veille :

Utiliser le symbole d’équivalence à bon escient (équations, équations, ensemble de point)

Corrigé du contrôle du 1-10-2016

I.

On considère le polynôme $P(z)=z^4-16z^3+90z^2-16z+89$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1°) Démontrer que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z^2+1)(z^2-16z+89)$.

Posons $Q(z)=(z^2+1)(z^2-16z+89)$.

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C}\quad Q(z)&=z^4-16z^3+89z^2+z^2-16z+89\\&=z^4-16z^3+90z^2-16z+89\\&=P(z)\end{aligned}$$

Donc $\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=(z^2+1)(z^2-16z+89)$.

> On retiendra la méthode qui consiste à poser $Q(z)=\dots$.
>
> Beaucoup d'élèves ont écrit :
>
> $$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)&=z^4-16z^3+89z^2+z^2-16z+89\\&=z^4-16z^3+90z^2-16z+89\end{aligned}$$
>
> Je n'ai mis alors aucun point pour la question.

Autre méthode effectuée par Clément Robin :

Il s'agit d'une méthode directe, un peu moins facile à trouver.

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)&=z^2(z^2-16z+90)-16z+89\\&=z^2(z^2-16z+89)+z^2-16z+89\\&=(z^2+1)(z^2-16z+89)\end{aligned}$$

Donc $\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=(z^2+1)(z^2-16z+89)$.

2°) En déduire les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)$. On donnera les résultats sous forme algébrique simplifiée. Répondre par une phrase sans justifier.

Les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(z)$ sont i, $-\mathrm{i}$, $8+5\mathrm{i}$ et $8-5\mathrm{i}$.

> On peut vérifier à l'aide de la calculatrice en utilisant l'application de résolution des équations polynomiales en demandant directement à la calculatrice de résoudre l'équation $z^4-16z^3+90z^2-16z+89=0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

On résout l'équation $P(z)=0$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

$(\mathrm{E})\Leftrightarrow(z^2+1)(z^2-16z+89)=0$ (on utilise le résultat du 1°))

$\Leftrightarrow z^2+1=0$ (1) ou $z^2-16z+89=0$ (2)

On résout séparément les équations (1) et (2).

$(1)\Leftrightarrow z^2=-1$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$ (résultat du cours)

Pour l'équation (2), il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels.
On utilise le discriminant réduit Δ' qui se calcule immédiatement.

$\Delta'=8^2-1\times89=64-89=-25$

Comme $\Delta'<0$, l'équation (2) admet deux racines complexes conjuguées qu'on obtient grâce aux formules utilisant le discriminant réduit : $8+5\mathrm{i}$ et $8-5\mathrm{i}$.

On en déduit l'équivalence :

$(\mathrm{E})\Leftrightarrow z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$ ou $z=8+5\mathrm{i}$ ou $z=8-5\mathrm{i}$.

II.

On pose $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

1°) Calculer z^3.

$$\begin{aligned}z^3&=(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3\\&=(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2(\sqrt{3}+\mathrm{i})\\&=(2+2\sqrt{3}\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})\\&=8\mathrm{i}\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser l'identité remarquable $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ qu'il faut absolument connaître.

2°) Le nombre z^{2016} est-il réel ? Justifier brièvement.

$$z^{2016} = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^{2016}$$

2016 est divisible par 3 puisque la somme de ses chiffres qui est égale à 9 est divisible par 3.

Nous allons utiliser le résultat de la question 1°).

$$z^{2016} = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^{3\times 672}$$

$$= \left(\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^{3}\right)^{672}$$

$$= (8\mathrm{i})^{672}$$

$$= 8^{672} \times \mathrm{i}^{672}$$

Or $\mathrm{i}^{672} = \left(\mathrm{i}^4\right)^{168} = 1$ (on se réfère au cours sur les puissances de i ; 672 est divisible par 4).

On peut donc écrire $z^{2016} = 8^{672}$.
On peut donc affirmer que le nombre z^{2016} est réel et l'on peut même préciser son signe : il est positif.

On peut également dire que toute puissance de i d'exposant pair donne un résultat réel (égal à 1 ou à – 1).

La calculatrice est en dépassement de capacité pour z^{2016} et donne un résultat pas exact.

III.

1°) On pose $Z = (x+1+\mathrm{i}y)\left(\mathrm{i}(x-1) - y\right)$ où x et y sont deux réels.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y. On donnera les résultats sous forme simplifiée.

$\mathrm{Re}\, Z = -\,2xy$	$\mathrm{Im}\, Z = x^2 - y^2 - 1$

$$Z = (x+1+\mathrm{i}y)\left(\mathrm{i}(x-1) - y\right)$$

$$= \left[(x+1) + \mathrm{i}y\right]\left[\mathrm{i}(x-1) - y\right]$$

$$= (x+1)\times \mathrm{i}(x-1) + \mathrm{i}(x+1)\times \mathrm{i}y - y(x-1) - \mathrm{i}y\times y \quad \text{(on développe intelligemment)}$$

$$= \mathrm{i}(x+1)(x-1) - (x+1)y - y(x-1) - \mathrm{i}y^2$$

$$= \mathrm{i}\left(x^2 - 1\right) - xy - y - yx + y - \mathrm{i}y^2$$

$$= \mathrm{i}\left(x^2 - y^2 - 1\right) - 2xy$$

2°) On pose $Z' = \dfrac{\mathrm{i}(x-1) - y}{x+1-\mathrm{i}y}$ où x et y sont deux nombres réels tels que $(x\,;\,y) \neq (-1\,;\,0)$.
Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z' en fonction de x et y.
On donnera les résultats sous forme simplifiée en laissant le dénominateur comme somme de deux carrés.

$\mathrm{Re}\, Z' = -\dfrac{2xy}{(x+1)^2 + y^2}$	$\mathrm{Im}\, Z' = \dfrac{x^2 - y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2}$

$$Z' = \frac{\mathrm{i}(x-1) - y}{x+1-\mathrm{i}y}$$

$$= \frac{\mathrm{i}(x-1) - y}{(x+1) - \mathrm{i}y}$$

$$= \frac{\left[\mathrm{i}(x-1) - y\right]\left[(x+1) + \mathrm{i}y\right]}{\left[(x+1) - \mathrm{i}y\right]\left[(x+1) + \mathrm{i}y\right]}$$

$$= \frac{Z}{(x+1)^2 + y^2} \quad \text{(on reconnaît que le numérateur est égal à } Z \text{ défini au 1°)}$$

$$= \frac{\mathrm{i}\left(x^2 - y^2 - 1\right) - 2xy}{(x+1)^2 + y^2} \quad \text{(on utilise le résultat du 1°)).}$$

IV.

On considère la suite complexe (z_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et telle que pour tout entier naturel *n*, $z_{n+1} = 1-(1+\mathrm{i})\overline{z_n}$. On ne cherchera pas l'expression de z_n en fonction de *n*.

1°) Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$.
Que peut-on conjecturer pour la suite (z_n) dans ce cas ? Répondre par une phrase sans justifier.
Comment pourrait-on démontrer cette conjecture ? On ne demande pas de faire la démonstration.

En calculant les premiers termes, on observe que $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = \mathrm{i}$ etc.
Il semble que tous les termes de la suite soient égaux à i.
Il semble donc que pour $z_0 = \mathrm{i}$, la suite (z_n) soit constante.
On peut démontrer ce résultat par récurrence.

2°) Déterminer z_0 tel que $z_1 = \overline{z_0}$.

On cherche z_0 tel que $z_1 = \overline{z_0}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow 1-(1+\mathrm{i})\overline{z_0} = \overline{z_0}$

$\Leftrightarrow (2+\mathrm{i})\overline{z_0} = 1$ (on ne développe surtout pas $(2+\mathrm{i})\overline{z_0}$!)

$\Leftrightarrow \overline{z_0} = \dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z_0} = \dfrac{2-\mathrm{i}}{5}$

$\Leftrightarrow z_0 = \dfrac{2+\mathrm{i}}{5}$

3°) Déterminer z_0 tel que $z_2 = 4\mathrm{i}-3$.

On considère l'égalité $z_2 = 4\mathrm{i}-3$ (1).

$(1) \Leftrightarrow 1-(1+\mathrm{i})\overline{z_1} = 4\mathrm{i}-3$

$\Leftrightarrow -(1+\mathrm{i})\overline{z_1} = 4\mathrm{i}-4$

$\Leftrightarrow \overline{z_1} = \dfrac{4-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z_1} = \dfrac{(4-4\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$

$\Leftrightarrow \overline{z_1} = \dfrac{4\times(-\cancel{2}\mathrm{i})}{\cancel{2}}$

$\Leftrightarrow \overline{z_1} = -4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z_1 = 4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 1-(1+\mathrm{i})\overline{z_0} = 4\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow -(1+\mathrm{i})\overline{z_0} = 4\mathrm{i}-1$

$\Leftrightarrow \overline{z_0} = \dfrac{1-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow \overline{z_0} = \dfrac{(1-4\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}$

$\Leftrightarrow z_0 = \dfrac{1-4-5\mathrm{i}}{2}$

$\Leftrightarrow z_0 = \dfrac{-3-5\mathrm{i}}{2}$

$\Leftrightarrow z_0 = \dfrac{5\mathrm{i}-3}{2}$

4°) Exprimer, pour *n* entier naturel quelconque, z_{n+2} en fonction de z_n.

$z_{n+2} = 1-(1+\mathrm{i})\overline{z_{n+1}}$

$= 1-(1+\mathrm{i})\overline{\left(1-(1+\mathrm{i})\overline{z_n}\right)}$

$= 1-\left(1-(1-\mathrm{i})z_n\right)$ (on utilise les propriété des conjugués : conjugué d'une somme et conjugué d'un produit)

$= 2z_n - \mathrm{i}$

5°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note V le point d'affixe i.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.
Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $\overrightarrow{\mathrm{VM}_{n+2}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{VM}_n}$ où α est un réel (indépendant de n) à préciser.

Soit n un entier naturel fixé.

V a pour affixe i [on peut écrire $\mathrm{V}\left(\mathrm{i}\right)$].

Le point M_n a pour affixe z_n et le point . M_{n+2} a pour affixe z_{n+2} [on peut écrire $\mathrm{M}_n\left(z_n\right)$ et $\mathrm{M}_{n+2}\left(z_{n+2}\right)$].

On « calcule » les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{VM}_n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{VM}_{n+2}}$ (notées $z_{\overrightarrow{\mathrm{VM}_n}}$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{VM}_{n+2}}}$ selon la notation habituelle de l'affixe d'un vecteur).

$z_{\overrightarrow{\mathrm{VM}_n}} = z_{\mathrm{M}_n} - z_{\mathrm{V}} = z_n - \mathrm{i}$

$z_{\overrightarrow{\mathrm{VM}_{n+2}}} = z_{\mathrm{M}_{n+2}} - z_{\mathrm{V}} = z_{n+2} - \mathrm{i} = 2z_n - \mathrm{i} - \mathrm{i} = 2z_n - 2\mathrm{i}$ (on utilise le résultat de la question précédente)

Comme il a été dit, il faut vraiment respecter la notation de l'affixe d'un vecteur et veiller à ne pas écrire $\overrightarrow{\mathrm{VM}_n} = z_n - \mathrm{i}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{VM}_{n+2}} = 2z_n - 2\mathrm{i}$ comme l'ont fait certains élèves.

On a donc $z_{\overrightarrow{\mathrm{VM}_{n+2}}} = 2z_{\overrightarrow{\mathrm{VM}_n}}$.

On en déduit que donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \overrightarrow{\mathrm{VM}_{n+2}} = 2\overrightarrow{\mathrm{VM}_n}$.

V.

On considère l'algorithme ci-contre. On précise que toutes les variables sont des entiers naturels.
On ne demande pas de le programmer sur calculatrice.
Faire fonctionner l'algorithme suivant « à la main » lorsque la valeur de n saisie en entrée est 4.
Écrire les valeurs de u et v affichées en sortie (un seul résultat à chaque fois, sans égalité).

47 76

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 2
v prend la valeur 1

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  a prend la valeur u
  u prend la valeur $u+v$
  v prend la valeur $a+2v$
FinPour

Sortie :
Afficher u et v

Le mieux est de dresser un tableau d'évolution des variables i, a, u, v.

	Étape 0	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4
i		1	2	3	4
a		2	3	7	18
u	2	3	7	18	47
v	1	4	11	29	76

Si l'on ne fait pas de tableau, on peut présenter les calculs sous la forme suivante.

Les valeurs initiales de u et v sont respectivement 2 et 1.

Pour $i=1$, a prend la valeur 2 (valeur initiale de u) ; u prend la valeur $2+1=3$; v prend la valeur $2+2\times1=4$.
Pour $i=2$, a prend la valeur 3 (valeur précédente de u) ; u prend la valeur 7 ; v prend la valeur 11.
Pour $i=3$, a prend la valeur 7 ; u prend la valeur 18; v prend la valeur 29.
Pour $i=4$, a prend la valeur 18 ; u prend la valeur 47; v prend la valeur 76.

On peut aussi présenter ainsi mais il faut faire attention aux égalités.

$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
$a=2$	$a=3$	$a=7$	$a=18$
$u=3$	$u=7$	$u=18$	$u=47$
$v=4$	$v=11$	$v=29$	$v=76$

On se garde d'écrire $v=a+2v=2+2\times1=4$. À la rigueur, on peut écrire $v \leftarrow\ v=a+2v=2+2\times1=4$.

VI.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$.

1°) Calculer « à la main » les premiers termes de la suite (u_n) ou « rentrer » la suite dans la calculatrice.
Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n. On ne demande pas de justifier.
On répondra uniquement par une phrase sur le modèle suivant à recopier :
« On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = ...$ ».

$$u_1 = \frac{u_0}{1+2u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1}{1+2u_1} = \frac{\frac{1}{4}}{1+2\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1+2u_2} = \frac{\frac{1}{6}}{1+2\times\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

On observe que $u_1 = \frac{1}{2+2\times1}$, $u_2 = \frac{1}{2+2\times2}$, $u_3 = \frac{1}{2+2\times3}$, $u_4 = \frac{1}{2+2\times4}$, $u_5 = \frac{1}{2+2\times5}$ etc.

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = \frac{1}{2n+2}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$ (on admettra que pour tout entier naturel n, u_n est non nul)
En utilisant la suite (v_n), démontrer que la conjecture émise au 1°) est vraie.

On travaille en calcul littéral.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+2u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n}+2 = v_n + 2$$

On en déduit que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

Une variante consiste à démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = 2$.

On utilise la formule explicite donnant le terme général d'une suite arithmétique.

On sait donc que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 + 2n$.

Un calcul immédiat donne $v_0 = \frac{1}{u_0} = 2$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2 + 2n$.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2n+2}$.

La conjecture est démontrée.