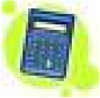
TS3 spécialité

Contrôle du lundi 26 septembre 2016 (50 minutes)



Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

Note : …. / 20

Prénom : ………………………………. **Nom : …………………………………………………**

I. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points + 1 point ; 3°) 2 points)

Les questions 2°) et 3°) sont indépendantes.

1°) **Question de cours**

Compléter l'énoncé du lemme.

Soit *a*, *b*, *c*, *d* quatre entiers relatifs tels que $a = bc + d$.

b divise $a \Leftrightarrow$ ………………………………………………

2°) Vérifier au brouillon que pour tout entier relatif *n* on a : $4n^2 + 6n + 7 = 2(n+1)(2n+1) + 5$.
Le but de l'exercice est de déterminer les entiers relatifs *n* tels que $n+1$ divise $4n^2 + 6n + 7$.
Pour cela, on raisonne par équivalences en utilisant le lemme rappelé dans le 1°).

On applique le lemme rappelé dans la question précédente avec

$a =$ ……………………… , $b =$ ……………………… , $c =$ ……………………… , $d =$ ……………………….

$n+1 \mid 4n^2 + 6n + 7 \Leftrightarrow n+1 \mid$ ……… (compléter par un entier relatif indépendant de *n*)

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………………………………

On complètera la deuxième et la troisième ligne par des égalités (la deuxième par des égalités du type $n+1 =$ ……… et la troisième par des égalités du type $n =$ ………).

Conclure clairement :

Les entiers relatifs *n* cherchés sont ………………………………………….. .

3°) En s'inspirant de la méthode adoptée dans la question 2°), déterminer les entiers relatifs *n* tels que $n+10$ divise $(n+5)^2$. On attend le même type de rédaction que dans la question 2°).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (7 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{N}$ qui, à tout entier naturel, associe la somme de ses chiffres en base 10.

Exemple : $f(315) = 3+1+5 = 9$

Les deux parties sont indépendantes.
La question 2°) de la partie B est un peu plus longue. Il est conseillé de la chercher à la fin du contrôle.

Partie A (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Déterminer quatre antécédents de 5 par *f*.

……………………………..

2°) Quels sont les antécédents de 1 par *f* ? Répondre par une phrase sans justifier.

……..…..

Partie B (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Dans cette partie, on s'intéresse aux entiers naturels *n* tels que *n* soit divisible par $f(n)$ c'est-à-dire aux entiers naturels qui sont divisibles par la somme de leur chiffres en base 10.
Ces nombres sont appelés nombres Harshad en base 10.
Par exemple, le nombre 2016 est un nombre Harshad car $f(2016) = 9$ et 2016 est divisible par 9.

1°) **Vrai ou faux ?** Répondre sans justifier.
Tout entier naturel de la forme 10^q où *q* est un entier naturel est un nombre Harshad.

…………….. (ne pas faire de phrase)

2°) Déterminer les entiers naturels Harshad inférieurs ou égaux à 100.
Écrire la liste sans justifier sur une seule ligne, dans l'ordre croissant, sans faire de phrase.

……..…..

III. (5 points)

Le but de l'exercice est de déterminer par deux méthodes différentes l'entier naturel N qui s'écrit avec deux chiffres en base 10 vérifiant les conditions C_1 et C_2 précisées ci-dessous.

- C_1 : La somme de ses chiffres est égale à 12.
- C_2 : Le nombre diminue de 18 quand on permute (c'est-à-dire quand on échange) ses deux chiffres.

Les deux méthodes doivent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

• Première méthode (2 points)

Écrire tous les entiers naturels qui s'écrivent avec deux chiffres en base 10 dont la somme des chiffres est égale à 12.
Chercher ensuite parmi ceux-ci lequel vérifie la condition C_2. On ne demande pas d'écrire ici cette vérification.
Conclure par une phrase sur le modèle suivant : « L'entier naturel N cherché est … ».

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

• Deuxième méthode (1 point + 2 points)

On note *a* le chiffre des dizaines et *b* le chiffre des unités de N.
Traduire les conditions C_1 et C_2 par des égalités liant *a* et *b*. En déduire N.

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

……..…..

Corrigé du contrôle du 26-9-2016

I.

Les questions 2°) et 3°) sont indépendantes.

1°) **Question de cours**

Compléter l'énoncé du lemme.

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a = bc + d$.

$$b \text{ divise } a \Leftrightarrow b \text{ divise } a \Leftrightarrow b \text{ divise } d$$

2°) Vérifier au brouillon que pour tout entier relatif n on a : $4n^2 + 6n + 7 = 2(n+1)(2n+1) + 5$.
Le but de l'exercice est de déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $4n^2 + 6n + 7$.
Pour cela, on raisonne par équivalences en utilisant le lemme rappelé dans le 1°).

On applique le lemme rappelé dans la question précédente avec

$a = 4n^2 + 6n + 7 \quad , \quad b = n+1 \quad , \quad c = 2(2n+1) \quad , \quad d = 5$.

$n+1 \mid 4n^2 + 6n + 7 \Leftrightarrow n+1 \mid 5$ (compléter par un entier relatif indépendant de n)

$\Leftrightarrow n+1 = 5$ ou $n+1 = -5$ ou $n+1 = 1$ ou $n+1 = -1$

$\Leftrightarrow n = 4$ ou $n = -6$ ou $n = 0$ ou $n = -2$

On complètera la deuxième et la troisième ligne par des égalités (la deuxième par des égalités du type $n+1 = \ldots\ldots\ldots$ et la troisième par des égalités du type $n = \ldots\ldots\ldots$).

Conclure clairement :

Les entiers relatifs n cherchés sont 4, – 6, 0 et – 2.

3°) En s'inspirant de la méthode adoptée dans la question 2°), déterminer les entiers relatifs n tels que $n+10$ divise $(n+5)^2$. On attend le même type de rédaction que dans la question 2°).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+5)^2 = n(n+10) + 25$

On applique le lemme rappelé au 1°) avec

$a = (n+5)^2 \quad , \quad b = n+10 \quad , \quad c = n \quad , \quad d = 25$.

$n+10 \mid (n+5)^2 \Leftrightarrow n+10 \mid 25$ (compléter par un entier relatif indépendant de n)

$\Leftrightarrow n+10 = 25$ ou $n+10 = -25$ ou $n+10 = -5$ ou $n+10 = 5$ ou $n+10 = 1$ ou $n+10 = -1$

$\Leftrightarrow n = 15$ ou $n = -35$ ou $n = -15$ ou $n = -5$ ou $n = -9$ ou $n = -11$

Conclure clairement :

Les entiers relatifs n cherchés sont 15, – 35, – 15, – 5, – 9 et – 11.

II.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ qui, à tout entier naturel, associe la somme de ses chiffres en base 10.
Exemple : $f(315) = 3 + 1 + 5 = 9$
Les deux parties sont indépendantes.
La question 2°) de la partie B est un peu plus longue. Il est conseillé de la chercher à la fin du contrôle.

$f(n) =$ somme des chiffres de l'écriture de n en base 10
Il n'y a pas moyen d'écrire autrement $f(n)$.

Pour utiliser le symbole Σ, il faut poser $n = \overline{a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0}$ où a_0, a_1 … a_p sont les chiffres de l'écriture en base 10 de n. On a alors $f(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=p} a_k$.

Il n'existe pas de formule explicite pour $f(n)$ en fonction de n.

Partie A

1°) Déterminer quatre antécédents de 5 par f.

5, 23, 32, 122

2°) Quels sont les antécédents de 1 par f ? Répondre par une phrase sans justifier.

Les antécédents de 1 par f sont les nombres la forme 10^p avec $p \in \mathbb{N}$.

Les antécédents de 1 par f sont 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 etc. c'est-à-dire les nombres qui s'écrivent avec un 1 suivi de 0 (ou encore les nombres qui ne s'écrivent avec un seul 1 et que des 0). Il y en a une infinité.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse aux entiers naturels n tels que n soit divisible par $f(n)$ c'est-à-dire aux entiers naturels qui sont divisibles par la somme de leur chiffres en base 10.
Ces nombres sont appelés nombres Harshad en base 10.
Par exemple, le nombre 2016 est un nombre Harshad car $f(2016)=9$ et 2016 est divisible par 9.

1°) **Vrai ou faux ?** Répondre sans justifier.
Tout entier naturel de la forme 10^q où q est un entier naturel est un nombre Harshad.

Vrai (ne pas faire de phrase)

On a : $f\left(10^q\right)=1$ (cf. question 2°) de la partie A).

2°) Déterminer les entiers naturels Harshad inférieurs ou égaux à 100.
Écrire la liste sans justifier sur une seule ligne, dans l'ordre croissant, sans faire de phrase.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100

On prend un par un les entiers naturels inférieurs ou égaux à 100.

III.

Le but de l'exercice est de déterminer par deux méthodes différentes l'entier naturel N qui s'écrit avec deux chiffres en base 10 vérifiant les conditions C_1 et C_2 précisées ci-dessous.

- C_1 : La somme de ses chiffres est égale à 12.
- C_2 : Le nombre diminue de 18 quand on permute (c'est-à-dire quand on échange) ses deux chiffres.

Les deux méthodes doivent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

● **Première méthode**

Écrire tous les entiers naturels qui s'écrivent avec deux chiffres en base 10 dont la somme des chiffres est égale à 12.
Chercher ensuite parmi ceux-ci lequel vérifie la condition C_2. On ne demande pas d'écrire ici cette vérification.
Conclure par une phrase sur le modèle suivant : « L'entier naturel N cherché est … ».

Les entiers naturels qui s'écrivent avec deux chiffres en base 10 dont la somme des chiffres est égale à 12 sont : 39 ; 48 ; 57 ; 66 ; 75 ; 84 ; 93.
Parmi ces entiers, le seul qui vérifie la condition C_2 est 75.
On en déduit que l'entier naturel N cherché est 75.

● Il y a 7 couples d'entiers naturels non nuls dont la somme est égale à 12 : $(3\,;9)$, $(4\,;8)$, $(5\,;7)$, et $(6\,;6)$, $(7\,;5)$, $(8\,;4)$, $(9\,;3)$ ce qui fournit les entiers naturels vérifiant la condition C_1.

● Certains élèves n'ont pas donné la liste complète tous les entiers naturels qui s'écrivent avec deux chiffres en base 10 dont la somme des chiffres est égale à 12. Ils ont donné par exemple 57 mais ont oublié de donner aussi 75.

● **Deuxième méthode**

On note a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités de N.
Traduire les conditions C_1 et C_2 par des égalités liant a et b. En déduire N.

On peut traduire la condition C_1 par l'égalité $a+b=12 \quad (1)$.

On peut traduire la condition C_2 par l'égalité $\overline{ba}=\overline{ab}-18 \quad (2)$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow 10b+a=10a+b-18\\ &\Leftrightarrow 9a-9b=18\\ &\Leftrightarrow a-b=2\end{aligned}$$

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=7\\b=5\end{cases}$$

On en conclut que $N=75$.