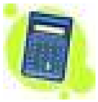
1ère S1

Contrôle du mardi 27 septembre 2016 (50 min)



Prénom : ………………………………. **Nom :** ……………………………….   **Note : …. / 20**

I. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \left|1-|x|\right|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer les images par f de $\pi-1$, $-\frac{1}{3}$, $-2-\pi$. On effectuera les calculs au brouillon et l'on donnera les résultats en valeurs exactes.

$f(\pi-1)=$………… $f\left(-\frac{1}{3}\right)=$………… $f(-2-\pi)=$…………

II. (1 point)

On considère l'algorithme suivant, rédigé en langage naturel. Les variables x et y sont deux nombres réels.

```
Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si x ⩾ 0
    Alors y prend la valeur x/(1+x)
    Sinon y prend la valeur x/(1−x)
FinSi

Sortie :
Afficher y
```

Compléter sans justifier la phrase suivante :

La fonction f qui à tout réel x saisi en entrée associe le réel y affiché en sortie est définie par :

$f(x)=$……………………………… (une seule expression)

III. (2 points)

On pose $A=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{27}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{12}\right)^2}$.

Écrire A sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers. On attend les grandes lignes de la démarche.

……

……

……

……

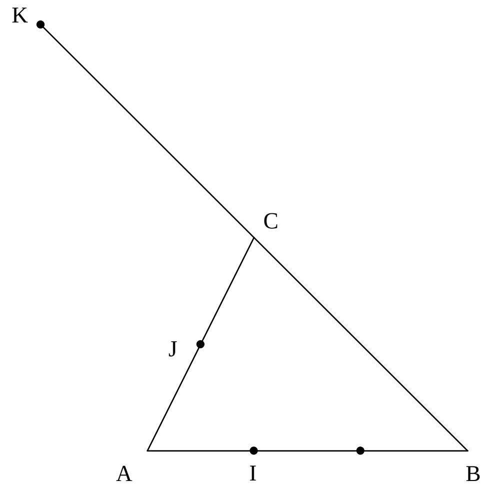
IV. (3 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3 respectivement de l'équation (1) et des inéquations (2) et (3) suivantes (recherche au brouillon) : $\left|\,|x-1|-2\right|=0$ (1) ; $2-|x+1|\leqslant 0$ (2) ; $2|x|<3$ (3).

$S_1=$………………………………	$S_2=$………………………………	$S_3=$………………………………

V. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

Soit ABC un triangle quelconque. On considère les points I, J, K définis par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BC}$.



Ne rien écrire sur la figure.

On se place dans le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

Dans cet exercice, il est demandé de n'utiliser que des calculs de coordonnées (pas de calcul vectoriel).

Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, I, J dans ce repère.

$\mathrm{A}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$ $\mathrm{B}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$ $\mathrm{C}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$ $\mathrm{I}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$ $\mathrm{J}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$

1°) Calculer les coordonnées $\left(x_{\mathrm{K}} ; y_{\mathrm{K}}\right)$ du point K dans le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

On attend une présentation extrêmement soignée en groupant les deux égalités sous forme d'un système de deux égalités. Conclure $\mathrm{K}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$.

....

....

....

....

....

....

....

....

2°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ (ne donner aucun détailler des calculs).

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$ $\overrightarrow{\mathrm{IK}}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$

Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ (aucune phrase n'est demandée).

....

Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$? Répondre par une phrase.

....

....

Que peut-on en déduire pour les points I, J, K ? Répondre par une phrase.

....

3°) On note L le milieu du segment $[\mathrm{BJ}]$.

Calculer les coordonnées de L. On donnera une étape de calcul montrant la formule utilisée puis le résultat.

$\mathrm{L}\left|\begin{array}{l}x_{\mathrm{L}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{\mathrm{L}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$

4°) Les droites (IJ) et (CL) sont-elles parallèles ?

Justifier soigneusement en prenant modèle sur les questions présentation la présentation des calculs et la rédaction.

....

....

....

....

....

....

VI. (1 point)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note U le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{OU}}=3\vec{j}-2\vec{i}$.

Quelles sont les coordonnées de U dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$? Répondre sans justifier.

$\mathrm{U}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$

Corrigé du contrôle du 27-9-2016

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \left| 1 - |x| \right|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer les images par f de $\pi - 1$, $-\dfrac{1}{3}$, $-2-\pi$. On effectuera les calculs au brouillon et l'on donnera les résultats en valeurs exactes.

$f(\pi-1) = 2-\pi$ $\qquad$ $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $f(-2-\pi) = 1+\pi$

$$\begin{aligned} f(\pi-1) &= \left|1-|\pi-1|\right| \\ &= \left|1-(\pi-1)\right| \quad \text{car } \pi-1>0 \\ &= |2-\pi| \\ &= \pi-2 \quad \text{car } 2-\pi>0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}\right) &= \left|1-\left|-\frac{1}{3}\right|\right| \\ &= \left|1-\frac{1}{3}\right| \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2-\pi) &= \left|1-|-2-\pi|\right| \quad \text{car } -2-\pi<0 \\ &= \left|1-(2+\pi)\right| \\ &= |-1-\pi| \\ &= 1+\pi \quad \text{car } -1-\pi<0 \end{aligned}$$

II.

On considère l'algorithme suivant, rédigé en langage naturel. Les variables x et y sont deux nombres réels.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $x \geqslant 0$
  Alors y prend la valeur $\dfrac{x}{1+x}$
  Sinon y prend la valeur $\dfrac{x}{1-x}$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Compléter sans justifier la phrase suivante :

La fonction f qui à tout réel x saisi en entrée associe le réel y affiché en sortie est définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \qquad \text{(une seule expression)}$$

III.

On pose $\mathrm{A} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{27}\right)^2} - \sqrt{\left(1-\sqrt{12}\right)^2}$.

Écrire A sous la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers. On attend les grandes lignes de la démarche.

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \left|-\sqrt{3}\right| - \left|1-2\sqrt{3}\right| \quad \text{(étape avec des valeurs absolues indispensable)} \\ &= \sqrt{3} - \left(2\sqrt{3}-1\right) \quad \text{car } 1-2\sqrt{3}<0 \\ &= 1-\sqrt{3} \end{aligned}$$

Des élèves ont calculé $\left(1-\sqrt{12}\right)^2$. Ils ont obtenu $13-4\sqrt{3}$ puis, avec la calculatrice, ont pu obtenir la valeur exacte la racine carrée. Ce n'était pas ce qui était attendu.

Variante :

On passe tout de suite en valeur absolue.

$$\mathrm{A} = \left|2\sqrt{3}-\sqrt{27}\right| - \left|1-\sqrt{12}\right|$$

IV.

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3 respectivement de l'équation (1) et des inéquations (2) et (3) suivantes (recherche au brouillon) : $|x-1|-2=0 \quad (1)$; $2-|x+1|\leqslant 0 \quad (2)$; $2|x|<3 \quad (3)$.

$S_1=\{-1\,;3\}$	$S_2=]-\infty\,;-3]\cup[1\,;+\infty[$	$S_3=\left]-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$

(1) est successivement équivalente à :

$|x-1|=2$

$x-1=2$ ou $x-1=-2$

$x=3$ ou $x=-1$

(2) est successivement équivalente à :

$|x+1|\geqslant 2$

$x+1\geqslant 2$ ou $x+1\leqslant -2$

$x\geqslant 1$ ou $x\leqslant -3$

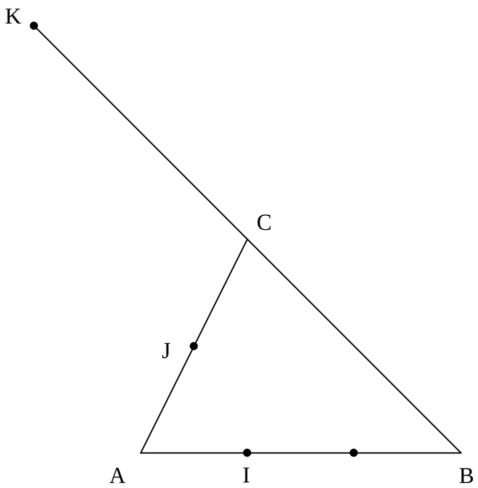
(3) est successivement équivalente à :

$|x|<\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$

V.

Soit ABC un triangle quelconque. On considère les points I, J, K définis par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BC}$.



Ne rien écrire sur la figure.

On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Dans cet exercice, il est demandé de n'utiliser que des calculs de coordonnées (pas de calcul vectoriel).

Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, I, J dans ce repère.

$A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ $\quad B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ $\quad C\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ $\quad I\left|\begin{matrix}\frac{1}{3}\\0\end{matrix}\right.$ $\quad J\left|\begin{matrix}0\\\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$

1°) Calculer les coordonnées $(x_K\,;y_K)$ du point K dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

On attend une présentation extrêmement soignée en groupant les deux égalités sous forme d'un système de deux égalités. Conclure $K\left|\begin{matrix}\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\end{matrix}\right.$.

$\overrightarrow{BC}\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$

On traduit l'égalité $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BC}$ en coordonnées.

$$\begin{cases} x_K-x_B=2\times(-1)\\ y_K-y_B=2\times 1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_K-1=-2\\ y_K-0=2\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_K=-1\\ y_K=2\end{cases}$$

$K\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$

On peut vérifier les coordonnées du point K sur la figure.

Des élèves ont exprimé que K est le symétrique B par rapport à C puis ont utilisé la formule des coordonnées d'un milieu. La méthode était acceptée.

Des élèves ont utilisé la décomposition des vecteurs pour obtenir les coordonnées de K.
Cette méthode n'était pas celle attendue dans l'exercice.

2°) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ (ne donner aucun détailler des calculs).

$$\overrightarrow{IJ}\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{IK}\begin{vmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ 2 \end{vmatrix}$$

Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ (aucune phrase n'est demandée).

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{3}\right)=0$$

Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$? Répondre par une phrase.

Comme le déterminant est égal à 0, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

Que peut-on en déduire pour les points I, J, K ? Répondre par une phrase.

On en déduit que les points I, J, K sont alignés.

3°) On note L le milieu du segment $[BJ]$.
Calculer les coordonnées de L. On donnera une étape de calcul montrant la formule utilisée puis le résultat.

$$L\begin{vmatrix} x_L = \dfrac{x_B + x_J}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \\ y_L = \dfrac{y_B + y_J}{2} = \dfrac{1}{4} \end{vmatrix}$$

4°) Les droites (IJ) et (CL) sont-elles parallèles ?
Justifier soigneusement en prenant modèle sur les questions présentation la présentation des calculs et la rédaction.

On est dans une démarche déductive.
On n'utilise pas de « si et seulement si » comme je l'ai dit à l'oral durant le contrôle.

$$\overrightarrow{CL}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{3}{4} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{4} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CL}$ est égal à 0.

On en déduit que les droites (IJ) et (CL) sont parallèles.

VI.

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note U le point tel que $\overrightarrow{OU} = 3\vec{j} - 2\vec{i}$.

Quelles sont les coordonnées de U dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$? Répondre sans justifier.

$$U\begin{vmatrix} -2 \\ \\ 3 \end{vmatrix}$$

On peut écrire $\overrightarrow{OU} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.