TS1 spécialité

Contrôle du mercredi 21 septembre 2016 (50 minutes)

Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

Note : …. / 20

Prénom : ………………………………… **Nom : ……………………………………………………**

I. (1 point) Question de cours

Compléter l'énoncé du lemme.

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a = bc + d$.

b divise a $\Leftrightarrow$ ………………………………………………

II. (3 points : 2 points + 1 point)

Vérifier au brouillon que pour tout entier relatif n on a : $3n^2 + 15n + 19 = 3(n+1)(n+4) + 7$.

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers relatifs n tels que $n+1$ divise $3n^2 + 15n + 19$.
Pour cela, on raisonne par équivalences en utilisant le lemme rappelé dans le **I**.

On applique le lemme rappelé dans le **I** avec

$a =$ ……………………… , $b =$ ……………………… , $c =$ ……………………… , $d =$ ……………………… .

$n+1 \mid 3n^2 + 15n + 19 \Leftrightarrow n+1 \mid$ ……… (compléter par un entier relatif indépendant de n)

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………

On complètera la deuxième et la troisième ligne par des égalités (la deuxième par des égalités du type $n+1 =$ ……… et la troisième par des égalités du type $n =$ ………).

Conclure clairement :

Les entiers relatifs n cherchés sont …………………………………………… .

III. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) a) 1 point ; b) 3 points)

1°) Démontrer à l'aide d'une égalité que, pour tout entier relatif n, $n^4 - 16$ est divisible par $n+2$. Justifier convenablement.

………

………

………

………

………

2°) Le but de cette question est de déterminer les entiers naturels n tels que $n+2$ divise $n^4 + 16$.

a) Écrire sans expliquer la liste des diviseurs positifs de 32.

………

b) Déterminer les entiers naturels n cherchés en observant que $n^4 + 16 = (n^4 - 16) + 32$.
On attend un raisonnement par équivalences.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (3 points : 1°) 1 point ; b) 2 points)

Jacques souhaite utiliser un système de chiffrement pour coder différents divers numéros personnels d'usage privé et noter ses numéros codés sur un carnet afin de les retrouver en cas d'oubli.
Il va utiliser le système décrit ci-dessous qui s'applique à chaque chiffre d'un numéro donc à des éléments de l'ensemble $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$.
On note m un élément de E. Ce chiffre m est remplacé par (codé par) le chiffre des unités de $3m + 4$.

1°) Sachant que l'un des numéros de Jacques est 4550, quel code doit-il écrire sur son carnet en utilisant ce système de chiffrement ?

…………………………………….. (un seul résultat sans faire de phrase)

2°) Un autre numéro codé inscrit sur son carnet est 701122. Quel est le numéro non codé ?

…………………………………….. (un seul résultat sans faire de phrase)

V. (4 points)

Un entier naturel A s'écrit en base 10 avec les deux chiffres a et b dans cet ordre. Autrement dit, $A = \overline{ab}$.
Si l'on inverse l'ordre des chiffres a et b, A augmente de 36.
Déterminer les chiffres a et b et le nombre A.

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

VI. (2 points)

Un phare breton émet un signal jaune toutes les 15 minutes et un signal rouge toutes les 27 minutes.
On aperçoit le signal jaune à 0 h 02 min et le signal rouge à 0 h 08 min.
À quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis en même temps ?
Donner le résultat sans faire de phrase ainsi que la démarche suivie s'il reste du temps.

……………………..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

……..….

Corrigé du contrôle du 21-9-2016

I.

Compléter l'énoncé du lemme.

Soit *a*, *b*, *c*, *d* quatre entiers relatifs tels que $a = bc + d$.

$$b \text{ divise } a \Leftrightarrow b \text{ divise } d$$

II.

Vérifier au brouillon que pour tout entier relatif *n* on a : $3n^2 + 15n + 19 = 3(n+1)(n+4) + 7$.

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers relatifs *n* tels que $n+1$ divise $3n^2 + 15n + 19$.
Pour cela, on raisonne par équivalences en utilisant le lemme rappelé dans le **I**.

On applique le lemme rappelé dans le **I** avec

$a = 3n^2 + 15n + 19 \quad , \quad b = n+1 \quad , \quad c = 3(n+4) \quad , \quad d = 7$.

Remarque : La relation $3n^2 + 15n + 19 = 3(n+1)(n+4) + 7$ peut s'écrire $3n^2 + 15n + 19 = (n+1) \times 3(n+4) + 7$ de manière à ce que l'égalité permette d'obtenir l'égalité $a = bc + d$.

On peut écrire les équivalences suivantes (chaîne d'équivalences) :

$n+1 \mid 3n^2 + 15n + 19 \Leftrightarrow n+1 \mid 7$ (compléter par un entier relatif indépendant de *n*)

$\Leftrightarrow n+1 = -7$ ou $n+1 = -1$ ou $n+1 = 1$ ou $n+1 = 7$

$\Leftrightarrow n = -8$ ou $n = -2$ ou $n = 0$ ou $n = 6$

On complètera la deuxième et la troisième ligne par des égalités (la deuxième par des égalités du type $n+1 = \ldots\ldots\ldots$ et la troisième par des égalités du type $n = \ldots\ldots\ldots$).

Conclure clairement :

Les entiers relatifs *n* cherchés sont – 8, – 2, 0 et 6.

III.

1°) Démontrer à l'aide d'une égalité que, pour tout entier relatif *n*, $n^4 - 16$ est divisible par $n+2$. Justifier convenablement.

$$\begin{aligned} n^4 - 16 &= \left(n^2\right)^2 - 4^2 \\ &= \left(n^2 - 4\right)\left(n^2 + 4\right) \\ &= (n-2)(n+2)\left(n^2 + 4\right) \end{aligned}$$

Certains élèves ont écrit $n^4 - 16 = (n+2)\left(n^3 - 2n^2 + 4n - 8\right)$. Il était inutile de faire développement du produit $(n-2)\left(n^2 + 4\right)$.

J'ai trouvé un certain nombre d'élèves qui ont appliqué la formule fondamentale de l'algèbre :
$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$.

Celle-ci ne permet pas de montrer facilement que $n^4 - 16$ est divisible par $n+2$.
En effet, la formule fondamentale de l'algèbre donne ici : $n^4 - 16 = n^4 - 2^4 = (n-2)\left(n^3 + 2n^2 + 4n + 8\right)$.

Elle permet de montrer directement que $n^4 - 16$ est divisible par $n-2$ mais ne fait pas apparaître de manière évidente que $n^4 - 16$ est divisible par $n+2$.

Par hypothèse, $n \in \mathbb{Z}$ donc $(n-2)\left(n^2 + 4\right) \in \mathbb{Z}$ donc $n^4 - 16$ est divisible par $n+2$.

2°) Le but de cette question est de déterminer les entiers naturels *n* tels que $n+2$ divise $n^4 + 16$.

a) Écrire sans expliquer la liste des diviseurs positifs de 32.

$$1 \ ; 2 \ ; 4 \ ; 8 \ ; 16 \ ; 32$$

b) Déterminer les entiers naturels *n* cherchés en observant que $n^4 + 16 = \left(n^4 - 16\right) + 32$.
On attend un raisonnement par équivalences.

On a : $n^4 + 16 = \left(n^4 - 16\right) + 32$.

Par suite, $n^4 + 16 = (n+2)(n-2)\left(n^2 + 4\right) + 32$.

On applique le lemme avec $n^4 + 16 = (n+2)(n-2)\left(n^2 + 4\right) + 32$

On applique le lemme rappelé dans le **I** avec

$$a = n^4 + 16 \quad , \quad b = n+2 \quad , \quad c = (n-2)\left(n^2 + 4\right) \quad , \quad d = 32.$$

$n+2 \mid n^4+16 \Leftrightarrow n+2 \mid 32$ (compléter par un entier relatif indépendant de n)

$\Leftrightarrow n+2=1$ ou $n+2=2$ ou $n+2=4$ ou $n+2=8$ ou $n+2=16$ ou $n+2=32$

$\Leftrightarrow n=0$ ou $n=2$ ou $n=6$ ou $n=14$ ou $n=30$

Les entiers naturels cherchés sont 0, 2, 6, 14, 30.

IV.

Jacques souhaite utiliser un système de chiffrement pour coder différents divers numéros personnels d'usage privé et noter ses numéros codés sur un carnet afin de les retrouver en cas d'oubli.
Il va utiliser le système décrit ci-dessous qui s'applique à chaque chiffre d'un numéro donc à des éléments de l'ensemble $E=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.
On note m un élément de E. Ce chiffre m est remplacé par (codé par) le chiffre des unités de $3m+4$.

1°) Sachant que l'un des numéros de Jacques est 4550, quel code doit-il écrire sur son carnet en utilisant ce système de chiffrement ?

6994 (un seul résultat sans faire de phrase)

2°) Un autre numéro codé inscrit sur son carnet est 701122. Quel est le numéro non codé ?

129966 (un seul résultat sans faire de phrase)

On établit un tableau de correspondance.

Chiffre non codé	**Chiffre codé**
0	4
1	7
2	0
3	3
4	6
5	9
6	2
7	5
8	8
9	1

V.

Un entier naturel A s'écrit en base 10 avec les deux chiffres a et b dans cet ordre. Autrement dit, $A=\overline{ab}$.
Si l'on inverse l'ordre des chiffres a et b, A augmente de 36.
Déterminer les chiffres a et b et le nombre A.

On a : $A=\overline{ab}$. On a donc $A=10a+b$ (décomposition de A en base 10).

Posons $B=\overline{ba}$. On a donc $B=10b+a$ (décomposition de B en base 10).

D'après l'énoncé, $B=A+36 \quad (1)$.

On peut mentionner que l'égalité $B=A+36$ entraîne l'inégalité $B>A$ qui entraîne finalement l'inégalité $b>a$.
Nous n'allons pas utiliser directement cette remarque.

Compte tenu des décompositions en base 10 de A et B, (1) permet d'écrire $10b+a=10a+b+36$.

On obtient immédiatement l'égalité $9b=9a+36$ qui donne l'égalité $b=a+4$ en simplifiant les deux membres par 9.

Or b est un chiffre donc $b\leqslant 9$ (un chiffre est compris entre 0 et 9 au sens large) donc $a+4\leqslant 9$ ce qui donne $a\leqslant 5$.

De plus, A s'écrit en base 10 avec deux chiffres donc $a\neq 0$.

a peut donc prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5.

1er cas : $a=1$
Dans ce cas, $b=5$.
D'où $A=15$ et $B=51$.
B est bien égal à A augmenté de 36.

2^{e} cas : $a=2$
Dans ce cas, $b=6$.
D'où $A=26$ et $B=62$.
B est bien égal à A augmenté de 36.

3^{e} cas : $a=3$
Dans ce cas, $b=7$.
D'où $A=37$ et $B=73$.
B est bien égal à A augmenté de 36.

4^{e} cas : $a=4$
Dans ce cas, $b=8$.
D'où $A=48$ et $B=84$.
B est bien égal à A augmenté de 36.

5[e] cas : $a=5$
Dans ce cas, $b=9$.
D'où $\text{A}=59$ et $\text{B}=95$.
B est bien égal à A augmenté de 36.

Les valeurs possibles de A sont 15, 26, 37, 48, 59.

VI.

Un phare breton émet un signal jaune toutes les 15 minutes et un signal rouge toutes les 27 minutes.
On aperçoit le signal jaune à 0 h 02 min et le signal rouge à 0 h 08 min.
À quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis en même temps ?
Donner le résultat sans faire de phrase ainsi que la démarche suivie s'il reste du temps.

1 h 02 min

Il s'agit d'un exercice ouvert, sans méthode du cours directement applicable.
On peut le résoudre de plusieurs manières :

- recherche « à la main » (cf. exemples trouvés dans des copies) ;

- utilisation de la calculatrice (grâce à des fonctions affines).

► Recherche « à la main » :

Quelques méthodes trouvées dans les copies :

● Diane Schneider, Marine Thépaut :

Nous devons trouver le multiple le plus petit de $15+2$ et $27+8$.
On trouve 62 comme multiple commun ($17+3\times15=62$ et $35+27=62$).
On additionne ensuite 62 à 12 h 00 min et on trouve 1 h 02 min.

● Marie Dartois, Maxime Convert, Tristan Colin, Cécile Cormier, Flavie Dessertenne, Juliette Bongiovanni, Lois Balandraud :

Signal jaune :	Signal rouge :
0 h 02 + 15 min = 0 h 17 min	0 h 08 min + 27 min = 0 h 35 min
0 h 17 min + 15 min = 0 h 32 min	0 h 35 min + 27 min = 1 h 02 min
0 h 32 min + 15 min = 0 h 47 min	
0 h 47 min + 15 min = 1 h 02 min	

● Noéline Ricau :

On remarque que $4\times15=60$. On part de 0 h 02 min, donc 60 min + 0 h 02 min = 1 h 02 min.
On remarque aussi que $27\times2=54$. Or, on part de 0 h 08 min, et 54 min + 0 h 08 min = 1 h 02 min.

On observera que l'on écrit toutes les unités dans les calculs (ce que beaucoup d'élèves ont oublié, en écrivant par exemple 1 h 02 au lieu de 1 h 02 min).

► Recherche avec la calculatrice :

On prend comme origine du temps 0 h 00 min.

On prend la minute pour unité de temps.

Les instants auxquels le signal jaune apparaît s'obtiennent en calculant l'expression $2+15x$ pour x entier naturel (2 auquel on ajoute un multiple de 15).

Les instants auxquels le signal rouge apparaît s'obtiennent en calculant l'expression $8+27x$ pour x entier naturel (2 auquel on ajoute un multiple de 15).

Grâce à la calculatrice, on dresse un tableau de valeurs des fonction affines $f : x \mapsto 2+15x$ et $g : x \mapsto 8+27x$ pour x démarrant à 0 avec un pas de 1.

On regarde ensuite dans le tableau la première valeur où il y a une coïncidence.