**TS1**

# Contrôle du vendredi 23 septembre 2016 (50 minutes)

**Prénom et nom :** ………………………………………………..……………

**Note : …….. / 20**

## I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{9^{n+4}}{6^{2n}}$ pour tout entier naturel *n*. Démontrer que $(u_n)$ est suite géométrique dont on précisera la raison. On attend une démonstration claire et concise.

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

2°) On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{(n+2)(1+2n)+1}{n+1}$ pour tout entier naturel *n*. Démontrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison. On attend une démonstration claire et concise.

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

## II. (1 point)

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au centième de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=25} \frac{k}{\sqrt{k}+1}$.

La valeur arrondie au centième de *S* est égale à …………………. .

## III. (1 point)

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

« Rentrer » la suite $(u_n)$ dans la calculatrice puis donner la valeur arrondie au millième de $u_{10}$.

La valeur arrondie au millième de $u_{10}$ est égale à …………………. .

## IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 - 2n + 1$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Dans cette question, on suppose que $u_0 = -2$. Calculer $u_3$ « à la main ».

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

2°) Déterminer la (les) valeur(s) de $u_0$ telle(s) que $u_2 = 8$.

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………….

**V. (2 points)**

On considère une suite géométrique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ de raison – 3 telle que $u_4 = -567$.

Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$.

$S =$ ..........................................

---

**VI. (2 points)**

On considère la suite arithmétique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = -10000$ et de raison 44.

Combien cette suite possède-t-elle de termes strictement négatifs ?

………………………. (un seul résultat sans justifier)

---

**VII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)**

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k}$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k - 1}{2^k}$.

1°) Déterminer une expression simplifiée de $S_n$ en fonction de *n*.

$S_n =$ .................................................... (un seul résultat sans justifier)

2°) Déterminer à l'aide du résultat du 1°) une expression simplifiée de $S_n'$ en fonction de *n*. Expliquer la démarche sur les lignes ci-dessous.

$S_n' =$ .................................................... (un seul résultat sans justifier)

…………………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………………...

**VIII. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)**

1°) On considère l'algorithme ci-dessous. La variable *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Faire tourner l'algorithme « à la main » pour $n = 4$ en entrée. On rappelle que 0 est un entier pair.
On complètera le tableau suivant d'évolution des variables *i* et *u*.

**Entrée :**
Saisir *n*

**Initialisation :**
*u* prend la valeur 2

**Traitement :**
**Pour** *i* allant de 0 à $n-1$ **Faire**
    **Si** *i* est pair
        **Alors** *u* prend la valeur $1+u^2$
        **Sinon** *u* prend la valeur $1-u^2$
    **FinSi**
**FinPour**

**Sortie :**
Afficher *u*

| ***i*** | | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***u*** | 2 | | | | |

La valeur de *u* affichée en sortie est égale à …………………………………….. .

2°) On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + (-1)^n (u_n)^2$ pour tout entier naturel *n*.

Que permet de calculer l'algorithme du 1°) pour la suite $(u_n)$ pour un entier naturel $n \geqslant 1$ saisi en entrée ?
On répondra sans justifier de manière précise par une phrase dont on donne le début à recopier et à compléter :
« L'algorithme du 1°) permet, pour un entier naturel $n \geqslant 1$ saisi en entrée, d'afficher en sortie ………. ».

…………………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………………...

# Corrigé du contrôle du 23-9-2016

## I.

1°) On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{9^{n+4}}{6^{2n}}$ pour tout entier naturel $n$. Démontrer que $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. On attend une démonstration claire et concise.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{9^n\times 9^4}{\left(6^2\right)^n}$$

$$=\frac{9^n}{\left(6^2\right)^n}\times 9^4$$

$$=\frac{9^n}{36^n}\times 6561$$

$$=\left(\frac{9}{36}\right)^n\times 6561$$

$$=6561\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On en déduit que la suite $\left(u_n\right)$ est géométrique de premier terme $u_0=6561$ et de raison $q=\dfrac{1}{4}$.

2$^{\text{e}}$ méthode :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{9^{n+5}}{6^{2n+2}}$$

$$=\frac{9^{n+4}\times 9}{6^{2n}\times 6^2}$$

$$=\frac{1}{4}u_n$$

On conclut de la même manière qu'avec la première méthode.

On pouvait aussi calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ mais cette méthode n'est pas recommandée ici car elle conduisait à beaucoup plus de calcul.

2°) On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{(n+2)(1+2n)+1}{n+1}$ pour tout entier naturel $n$. Démontrer que $\left(v_n\right)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison. On attend une démonstration claire et concise.

On calcule les premiers termes (à la main ou à la calculatrice).
On s'aperçoit que la suite $\left(v_n\right)$ semble arithmétique de raison 2.
On va donc le démontrer rigoureusement en transformant l'expression de $v_n$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{2n^2+5n+3}{n+1}$$

Le polynôme du second degré $2x^2+5x+3$ a pour racines $-1$ (racine évidente) et $-\dfrac{3}{2}$ (obtenue par produit).

On obtient la factorisation $2x^2+5x+3=2(x+1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=(x+1)(2x+3)$.

On obtient cette dernière égalité par la règle de factorisation d'un trinôme du second degré.

Le 2 peut ensuite être associé à l'un des deux facteurs du produit (un seul des deux facteurs). Ici, nous prenons le deuxième facteur qui évite ainsi d'avoir une fraction.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=\frac{(n+1)(2n+3)}{n+1}$$

$$=2n+3$$

On en déduit que la suite $\left(v_n\right)$ est arithmétique de premier terme $v_0=3$ et de raison $r=2$.

On pouvait aussi calculer $v_{n+1}-v_n$ mais cette méthode n'est pas recommandée ici car elle conduisait à des calculs assez pénibles.

---

## II.

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au centième de $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=25}\frac{k}{\sqrt{k}+1}$.

La valeur arrondie au centième de $S$ est égale à 66,78.

Avec la calculatrice, on obtient l'affichage : 66,7798025.

---

## III.

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0=1$ et $u_1=4$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}}+2\sqrt{u_n}$ pour tout entier naturel $n$.

« Rentrer » la suite $\left(u_n\right)$ dans la calculatrice puis donner la valeur arrondie au millième de $u_{10}$.

La valeur arrondie au millième de $u_{10}$ est égale à 8,759.

On rentre la suite ainsi dans la calculatrice.

$$\begin{aligned}&n\text{Min}=0\\&\text{u}(n)=\sqrt{\text{u}(n-1)}+2\sqrt{\text{u}(n-2)}\\&\text{u}(n\text{Min})=\{4{,}1\}\end{aligned}$$

Attention, il faut rentrer deux valeurs pour $\text{u}(n\text{Min})$ : d'abord la valeur de $u_1$ puis celle de $u_0$.

On obtient l'affichage 8,7588088889547.

Ainsi, $u_{10}=8{,}758808888954...$ .

---

## IV.

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=(u_n)^2-2n+1$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Dans cette question, on suppose que $u_0=-2$. Calculer $u_3$ « à la main ».

$$\begin{aligned}u_1&=u_{0+1}\\&=(u_0)^2-2\times0+1\\&=(-2)^2-2\times0+1\\&=5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_2&=u_{1+1}\\&=(u_1)^2-2\times1+1\\&=5^2-2+1\\&=24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_3&=u_{2+1}\\&=(u_2)^2-2\times2+1\\&=24^2-4+1\\&=573\end{aligned}$$

2°) Déterminer la (les) valeur(s) de $u_0$ telle(s) que $u_2=8$.

$u_2=(u_1)^2-2\times1+1$ donc $8=(u_1)^2-1$ ce qui donne $(u_1)^2=9$ soit $u_1=3$ ou $u_1=-3$.

1[er] cas : $u_1=3$

Dans ce cas, $3=(u_0)^2-2\times0+1$ d'où $(u_0)^2=2$ soit $u_0=\sqrt{2}$ ou $u_0=-\sqrt{2}$.

2[e] cas : $u_1=-3$

Dans ce cas, $-3=(u_0)^2-2\times0+1$ d'où $(u_0)^2=-4$ ce qui est impossible.

Conclusion : Les valeurs de $u_0$ telles que $u_2=8$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

## V.

On considère une suite géométrique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ de raison $-3$ telle que $u_4=-567$.
Calculer la somme $S=u_0+u_1+\dots+u_{15}$.

$$S=75331760$$

Justification :

On calcule d'abord $u_0$.

1[ère] méthode :

$u_0=u_4\times(-3)^{0-4}=-7$

2[e] méthode :

$u_4=-567$

$u_3=\dfrac{-567}{-3}=189$

$u_2=\dfrac{189}{-3}=-63$

$u_1=\dfrac{-63}{-3}=21$

$u_0=\dfrac{21}{-3}=-7$

$S=-7\times\dfrac{1-(-3)^{16}}{1-(-3)}$ ou $S=-7\times\dfrac{(-3)^{16}-1}{(-3)-1}$ (formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique)

---

## VI.

On considère la suite arithmétique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=-10000$ et de raison 44.
Combien cette suite possède-t-elle de termes strictement négatifs ?

228 (un seul résultat sans justifier)

1[ère] méthode :

On peut rentrer la suite dans la calculatrice et regarder la table de valeurs.

2$^{e}$ méthode :

On cherche les entiers naturels $n$ tels que $u_n < 0 \quad (1)$.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 44n - 10000$.

$$(1) \Leftrightarrow 44n - 10000 < 0$$
$$\Leftrightarrow n < \frac{10000}{44}$$

D'après la calculatrice, $\frac{10000}{44} = 227{,}272727...$ .

Les entiers naturels strictement inférieurs à $\frac{10000}{44}$ sont les entiers de 0 à 227. Il y en a 228.

Il ne faut pas oublier de compter $u_0$.

---

## VII.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k}$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k - 1}{2^k}$.

1°) Déterminer une expression simplifiée de $S_n$ en fonction de $n$.

$$S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \text{ou} \quad S_n = 2 - \frac{1}{2^n} \quad \text{(un seul résultat sans justifier)}$$

*Justification :*

On écrit $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et on applique la formule $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$.

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

2°) Déterminer à l'aide du résultat du 1°) une expression simplifiée de $S_n'$ en fonction de $n$. Expliquer la démarche sur les lignes ci-dessous.

$$S'_n = n + \frac{1}{2^n} - 1 \text{ (un seul résultat sans justifier)}$$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k - 1}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2^k}{2^k} - \frac{1}{2^k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{k=n} 1\right) - \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k}\right) \quad \text{(on sépare la somme en deux)}$$

$$= (n+1) - S_n$$

$$= (n+1) - 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= n + \frac{1}{2^n} - 1 \quad \left(\text{car } 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = \cancel{2} \times \frac{1}{2^n \times \cancel{2}} = \frac{1}{2^n}\right)$$

---

## VIII.

1°) On considère l'algorithme ci-dessous. La variable $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Faire tourner l'algorithme « à la main » pour $n = 4$ en entrée. On rappelle que 0 est un entier pair.
On complètera le tableau suivant d'évolution des variables $i$ et $u$.

**Entrée :**
Saisir $n$

**Initialisation :**
$u$ prend la valeur 2

**Traitement :**
**Pour** $i$ allant de 0 à $n-1$ **Faire**
  **Si** $i$ est pair
    **Alors** $u$ prend la valeur $1+u^2$
    **Sinon** $u$ prend la valeur $1-u^2$
  **FinSi**
**FinPour**

**Sortie :**
Afficher $u$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***i*** | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| ***u*** | 2 | 5 | – 24 | 577 | – 332 928 |

La valeur de *u* affichée en sortie est égale à – 332 928.

2°) On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \left(-1\right)^n \left(u_n\right)^2$ pour tout entier naturel *n*.

Que permet de calculer l'algorithme du 1°) pour la suite $\left(u_n\right)$ pour un entier naturel $n \geqslant 1$ saisi en entrée ?
On répondra sans justifier de manière précise par une phrase dont on donne le début à recopier et à compléter :
« L'algorithme du 1°) permet, pour un entier naturel $n \geqslant 1$ saisi en entrée, d'afficher en sortie ………. ».

L'algorithme du 1°) permet, pour un entier naturel $n \geqslant 1$ saisi en entrée, d'afficher en sortie la valeur du terme $u_n$.