TS1 et TS3 spé

Devoir N°4

L'algorithme de Kaprekar

L'algorithme de Kaprekar est un algorithme découvert en 1949 par le mathématicien indien Dattatreya Ramachandra Kaprekar pour les entiers naturels de quatre chiffres, mais qui peut être généralisé à tous les nombres entiers. Nous l'étudierons ici pour des entiers naturels de trois chiffres tels que ces chiffres soient deux à deux distincts. L'algorithme de Kaprekar consiste à associer à un entier naturel quelconque *n* un autre entier naturel $\mathrm{K}(n)$ généré de la façon suivante :

Étape 1 : À partir des chiffres qui composent *n*, former le plus grand nombre possible. On le note G.
Étape 2 : À partir des chiffres qui composent *n*, former le plus petit nombre possible. On le note P.
Étape 3 : $\mathrm{K}(n)$ est alors égal à la différence $\mathrm{G}-\mathrm{P}$. Par exemple, partant de 539, on a $\mathrm{G}=953$ et $\mathrm{P}=359$ donc $\mathrm{K}(539)=953-359=594$.

1°) Calculer $\mathrm{K}(198)$, $\mathrm{K}(357)$ et $\mathrm{K}(495)$.

2°) Appliquer l'algorithme de Kaprekar en partant du nombre 198 et en itérant autant de fois que nécessaire. Recommencer avec d'autres entiers naturels à trois chiffres deux à deux distincts. Que peut-on conjecturer ?

3°) On se propose de démontrer la conjecture émise à la question 2°). Pour cela, on choisit un entier naturel *n* composé de trois chiffres et que l'on écrit $\overline{abc}$ où *a*, *b* et *c* sont donc des entiers tous distincts compris entre 0 et 9 qui représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de *n*.

a) Expliquer pourquoi on peut, sans perdre de généralité, supposer que $a<b<c$.

b) Exprimer $\mathrm{K}(n)$ en fonction de *n*.

c) Démontrer la conjecture et préciser le nombre maximum d'itérations nécessaires.

Dates de remise du devoir :

TS1 : le mercredi 4 janvier 2017

TS3 : le mercredi 9 janvier 2017

Corrigé

1°) a) Calculer $K(198)$, $K(357)$ et $K(495)$.

• $K(198)$

Étape 1 : $G = 981$
Étape 2 : $P = 189$
Étape 3 : $K(198) = 981 - 189 = 792$

• $K(357)$

Étape 1 : $G = 753$
Étape 2 : $P = 357$
Étape 3 : $K(357) = 753 - 357 = 396$

• $K(495)$

Étape 1 : $G = 954$
Étape 2 : $P = 459$
Étape 3 : $K(495) = 954 - 459 = 495$

2°) Appliquer l'algorithme de Kaprekar en partant du nombre 198 et en itérant autant de fois que nécessaire. Recommencer avec d'autres entiers naturels à trois chiffres deux à deux distincts. Que peut-on conjecturer ?

• On part de 198.

On recopie la démarche effectuée à la question 1°) pour déterminer $K(198)$.

Étape 1 : $G = 981$
Étape 2 : $P = 189$
Étape 3 : $K(198) = 981 - 189 = 792$

On reprend la même démarche pour déterminer $K(792)$.

Étape 1 : $G = 972$
Étape 2 : $P = 279$
Étape 3 : $K(792) = 972 - 279 = 693$

On reprend la même démarche pour déterminer $K(693)$.

Étape 1 : $G = 963$
Étape 2 : $P = 369$
Étape 3 : $K(693) = 594$

On reprend la même démarche pour déterminer $K(594)$.

Étape 1 : $G = 954$
Étape 2 : $P = 459$
Étape 3 : $K(594) = 495$

Comme on avait déterminé $K(495)$ à la question 1°), on se contente de recopier les étapes qu'on avait écrites.

$K(495)$

Étape 1 : $G = 954$
Étape 2 : $P = 459$
Étape 3 : $K(495) = 954 - 459 = 495$

● Nous allons recommencer avec deux nouveaux entiers naturels de départ dont les chiffres en base 10 sont deux à deux distincts, par exemple 213 et 972.

▪ Avec 213

$K(213)$

Étape 1 : $G = 321$
Étape 2 : $P = 123$
Étape 3 : $K(213) = 198$

$K(198)$

Étape 1 : $G = 981$
Étape 2 : $P = 189$
Étape 3 : $K(198) = 981 - 189 = 792$

La suite des étapes a déjà été faite à la question 1°) pour le nombre 198 :
$K(792) = 693$, $K(693) = 594$, $K(594) = 495$, $K(495) = 495$

▪ Avec 972

$K(972)$

Étape 1 : $G = 972$
Étape 2 : $P = 279$
Étape 3 : $K(972) = 693$

La suite des étapes est la même que pour le nombre 213 choisi auparavant.

Les résultats précédents permettent de conjecturer que l'on obtient toujours un résultat égal à 495 au bout d'un certain nombre d'itérations quel que soit l'entier naturel de départ dont l'écriture en base 10 comporte trois chiffres distincts.

Autre formulation :

Dans les trois exemples précédents, on observe une convergence vers 495 (le terme de convergence n'est pas ici le plus approprié). On peut conjecturer qu'il en est de même quel que soit l'entier naturel de départ dont l'écriture en base 10 comporte trois chiffres distincts.

3°) On se propose de démontrer la conjecture émise à la question 2°). Pour cela, on choisit un entier *n* composé de trois chiffres et que l'on écrit $\overline{abc}$ où *a*, *b* et *c* sont donc des entiers tous distincts compris entre 0 et 9 qui représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de *n*.

a) Expliquer pourquoi on peut, sans perdre de généralité, supposer que $a < b < c$.

Si l'on permute les chiffres de l'entier naturel *n* de départ, on obtient les mêmes entiers G et P.

Comme on a supposé que *a*, *b* et *c* sont deux à deux distincts, on peut également supposer que $a < b < c$ sans perdre de généralité.

b) Exprimer $\mathrm{K}(n)$ en fonction de *n*.

On a $n = \overline{abc}$.

L'hypothèse $a < b < c$ permet de dire en reprenant les notations de l'énoncé que $\mathrm{G} = \overline{cba}$ et que $\mathrm{P} = n = \overline{abc}$ (il suffit soit de réfléchir un peu soit d'écrire les différents nombres possibles obtenus par permutations des chiffres de *n*).

Les décompositions de G et P en base 10 s'écrivent : $\mathrm{G} = 100c + 10b + c$ et que $\mathrm{P} = 100a + 10b + c$.

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(n) &= (100c + 10b + a) - (100a + 10b + c)\\ &= 99(c - a)\end{aligned}$$

c) Démontrer la conjecture et préciser le nombre maximum d'itérations nécessaires.

Comme $0 < a < b < c$ et que *a*, *b*, *c* sont compris entre 0 et 9 au sens large, on peut dire que $c - a$ est un entier compris entre 2 et 8.
En effet, l'hypothèse $0 < a < b < c$ permet de dire que l'on peut intercaler au moins un entier naturel entre *a* et *c* donc la différence $c - a$ vaut au minimum 2.
De plus, a et c étant des chiffres, donc des entiers compris entre 0 et 9 (avec a non nul), le maximum de $c - a$ est obtenu lorsque $a = 1$ et $c = 9$ soit $c - a = 8$.

On peut aussi réfléchir en termes de distances.

Il y a donc 7 valeurs possibles pour $c - a$: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Par suite, les valeurs possibles de $\mathrm{K}(n)$ sont : 198, 297, 396, 495, 594, 693 et 792.

Si on applique l’algorithme de Kaprekar autant de fois que nécessaire aux entiers précédents, on obtient toujours 495 au bout d’un certain nombre d’itérations :
198 – 792 – 693 – 594 – 495 ; 297 – 693 – 594 – 495 ; 396 – 594 – 495 ; 495 ; 594 – 495 ; 693 – 594 – 495 ; 792 – 693 – 594 – 495.

On constate que le nombre 495 est atteint en cinq itérations au maximum.

On dit parfois que 495 est un « puits » de l’algorithme de Kaprekar.

On dit parfois que 495 est un « puits » de l’algorithme de Kaprekar.