

## La pyramide de Ponzi

Bernard propose à ses clients de lui confier une somme de 100 euros. En échange, il s'engage à leur verser 10 euros le mois suivant tant que le capital reste placé.

Chaque mois, il trouve un nouveau client. Le premier mois, il ne prend qu'un client, il récupère 100 euros. Le deuxième mois, il recrute un nouveau client qui lui confie 100 euros, il verse 10 euros au premier client. Ainsi chaque mois, il trouve un nouveau client et utilise l'argent confié pour verser les intérêts promis ! À ses clients.

- 1°) À partir de combien de mois, le montant des intérêts versés sera supérieur ou égal à 150 euros ? Quel sera alors le capital détenu par Bernard ?
- 2°) Que se passe-t-il au bout de quelques mois ? On attend une conjecture.
- 3°) On désigne par  $C_n$  le capital restant en euros au bout de  $n$  mois ( $n \geq 1$ ). Calculer  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ .
- 4°) Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :  $C_{k+1} = C_k + 100 - 10k$ .
- 5°) On fixe un entier naturel  $n \geq 2$ . On écrit l'égalité  $C_{k+1} = C_k + 100 - 10k$  pour  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  et on fait la somme membre à membre comme dans le cadre ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 C_2 &= C_1 + 100 - 10 \times 1 \\
 C_3 &= C_2 + 100 - 10 \times 2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 C_n &= C_{n-1} + 100 - 10 \times (n-1)
 \end{aligned}$$

On barre ensuite en « diagonale » les termes qui s'annulent comme dans le cadre ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \cancel{C}_2 &= \cancel{C}_1 + 100 - 10 \times 1 \\
 \cancel{C}_3 &= \cancel{C}_2 + 100 - 10 \times 2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 C_n &= \cancel{C}_{n-1} + 100 - 10 \times (n-1)
 \end{aligned}$$

Recopier ce dernier cadre et en déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on a :

$$C_n = C_1 + (n-1) \times 100 - 10 \times (1 + 2 + \dots + (n-1)).$$

- 6°) Démontrer que  $C_n$  peut s'écrire sous la forme d'un polynôme du second degré.
- 7°) Démontrer la conjecture de la question 2°).

Pour éviter ce problème, il suffit donc de trouver à chaque fois de plus en plus de clients. Le système de Ponzi fonctionne tant que la pyramide grandit et qu'il y a suffisamment de nouveaux investisseurs pour financer les anciens investisseurs. À défaut la pyramide s'écroule, le système explose, et tous les derniers investisseurs perdent la totalité de ce qu'ils ont investi. La pyramide de Ponzi, est la première arnaque célèbre utilisant le système de la pyramide pour flouer les investisseurs. Punie depuis longtemps comme un délit, elle a été mise en place par Charles Ponzi à Boston en 1920. C'est ce système qui a été utilisé par Bernard Madoff, à l'origine du scandale du fonds Madoff, qui a fait perdre près de 50 milliards de dollars à ses investisseurs quand le système a explosé en décembre 2008.



Ponzi pris en photo vers 1920

On trouvera sur Wikipedia des renseignements sur Ponzi et son système. On trouvera également des vidéos sur YouTube expliquant le système de Ponzi.