TS1 spé

Devoir pour le mercredi 14 décembre 2016

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

Voici un algorithme, applicable à des entiers naturels de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités :

Étape 1 : Inverser l'ordre des chiffres (par exemple : 275 devient 572).

Étape 2 : Calculer la différence du plus grand et du plus petit de ces deux nombres.

Étape 3 : Réitérer l'étape 1 sur le nombre obtenu.

Étape 4 : Additionner ces deux derniers nombres.

1°) a) Appliquer l'algorithme aux nombres 123, 448 et 946.
b) Émettre une conjecture.
c) La conjecture précédente admet-elle des exceptions ? Justifier.

2°) Déterminer, à l'aide d'une démonstration clairement rédigée, le nombre obtenu en sortie de l'algorithme.

Indication : Choisir un entier naturel n de trois chiffres qui s'écrit en base 10 sous la forme $\overline{abc}$ où a, b et c sont des entiers compris entre 0 et 9 et représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de n avec $a \neq c$.

Formuler une conclusion claire de l'étude.

Corrigé

Voici un algorithme, applicable à des entiers naturels de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités :

> *Étape 1 :* Inverser l'ordre des chiffres (par exemple : 275 devient 572).
>
> *Étape 2 :* Calculer la différence du plus grand et du plus petit de ces deux nombres.
>
> *Étape 3 :* Réitérer l'étape 1 sur le nombre obtenu.
>
> *Étape 4 :* Additionner ces deux derniers nombres.

1°) a) Appliquer l'algorithme aux nombres 123, 448 et 946.

Pour 123 :
Étape 1 : 321
Étape 2 : $321-123=198$
Étape 3 : 891
Étape 4 : $891+198=1089$

Pour 448 :
Étape 1 : 844
Étape 2 : $844-448=396$
Étape 3 : 693
Étape 4 : $693+396=1089$

Pour 946 :
Étape 1 : 649
Étape 2 : $946-649=297$
Étape 3 : 792
Étape 4 : $792+297=1089$

Autre présentation :

Nombre	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4
123	321	$321-123=198$	891	$891+198=1089$
448	844	$844-448=396$	693	$693+396=1089$
946	649	$946-649=297$	792	$792+297=1089$

b) Émettre une conjecture.

On peut conjecturer que pour tout entier naturel de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités alors l'algorithme affiche en sortie 1089.

c) La conjecture précédente admet-elle des exceptions ? Justifier.

On peut constater des exceptions :

Pour 100 :
Étape 1 : 001
Étape 2 : $100-1=99$
Étape 3 : 99
Étape 4 : $99+99=198$

Pour 132 :
Étape 1 : 231
Étape 2 : $231-132=99$
Étape 3 : 99
Étape 4 : $99+99=198$

Pour 655 :
Étape 1 : 556
Étape 2 : $655-556=99$
Étape 3 : 99
Étape 4 : $99+99=198$

La démonstration va permettre d'y voir de plus près.

2°) Déterminer, à l'aide d'une démonstration clairement rédigée, le nombre obtenu en sortie de l'algorithme.

Indication : Choisir un entier naturel *n* de trois chiffres qui s'écrit en base 10 sous la forme $\overline{abc}$ où *a*, *b* et *c* sont des entiers compris entre 0 et 9 et représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de *n* avec $a \neq c$.

Formuler une conclusion claire de l'étude.

Soit *n* un entier naturel de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités.

On note :

a le chiffre des centaines ;

b le chiffre des dizaines ;

c le chiffre des unités.

On a $0 \leqslant a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$, $0 \leqslant c \leqslant 9$ et $a \neq c$.

On peut écrire $n = \overline{abc}$. La décomposition en base 10 de *n* s'écrit alors $n = 100a + 10b + c$.

Nous allons supposer que $a > c$. Le cas $a < c$ se traite de la même manière.

Étape 1 :
On obtient le nombre $n' = \overline{cba}$.
On a donc $n' = 100c + 10b + a$.

Étape 2 :
Comme $a > c$, $n > n'$.

$$\begin{aligned} n - n' &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) \\ &= 100(a - c) - (a - c) \\ &= 100(a - c) - 100 + 100 - (a - c) \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + 10 - a + c \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + 10 - a + c \\ &= 100(a - c - 1) + 10 \times 9 + (10 - a + c) \end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant a \leqslant 9$ et $0 \leqslant c \leqslant 9$, $-9 \leqslant -a \leqslant 0$ et par suite, $10 + 0 - 9 \leqslant 10 - a + c$ soit $1 \leqslant 10 - a + c$.

Comme $a > c$, $-a + c < 0$ d'où $10 - a + c < 10$.

Ainsi, $1 \leqslant 10 - a + c \leqslant 9$.

De même, on a supposé que $a > c$ d'où $a - c - 1 > -1$ et comme $a - c - 1$ est un entier, on a : $a - c - 1 \geqslant 0$.

$a - c - 1 \leqslant 9 + 0 - 1$ soit $a - c - 1 \leqslant 8$.

Il faut distinguer deux cas.

1er cas : $a-c-1>0$ autrement dit $a>c+1$

On en déduit que le nombre $n-n'$ est un entier naturel de la forme $\overline{a'b'c'}$ avec $a'=a-c-1$, $b'=9$ et $c'=10-a+c$. L'écriture en base 10 de $n-n'$ s'écrit bien avec trois chiffres.

On a : $1\leqslant a'\leqslant 8$ et $1\leqslant c'\leqslant 9$.

Étape 3 :

Le nombre $\overline{a'b'c'}$ devient $\overline{b'c'a'}$.

Étape 4 :

On note S la somme de $\overline{a'b'c'}$ et de $\overline{b'c'a'}$.

$$\begin{aligned}
S &= \overline{a'b'c'}+\overline{b'c'a'}\\
&= 100a'+10b'+c'+100c'+10b'+a'\\
&= 100a'+10\times 9+c'+100c'+10\times 9+a'\\
&= 100\left(a'+c'\right)+180+\left(c'+a'\right)\\
&= 100\times 9+180+9 \qquad (\text{car } a'+c'=9)\\
&= 1089
\end{aligned}$$

2e cas : $a-c-1=0$ autrement dit $a=c+1$

Dans ce cas, $n-n'=10\times 9+9=99$. L'écriture en base 10 de $n-n'$ s'écrit avec deux chiffres.

Étape 3 :

Le nombre 99 devient (reste) 99.

Étape 4 :

La somme S de 99 et de 99 est égale à 198.

Conclusion :

• Si $|a-c|>1$ (c'est-à-dire si l'écart entre le chiffre des unités et des centaines est strictement supérieur à 1), alors le nombre obtenu en sortie est égal à 1089.

• Si $|a-c|=1$ (c'est-à-dire si l'écart entre le chiffre des unités et des centaines est égal à 1), alors le nombre obtenu en sortie est égal à 198.