Fiche sur multiples et diviseurs

1. Ensembles des nombres

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{D}$: ensemble des décimaux relatifs

$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

2. Divisibilité

• Définition :

$(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

$a \mid b \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a \times k$

/!\ On ne peut remplacer $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{R}$ dans cette définition.

• Vocabulaire :

- *b* est un multiple de *a*
- *a* est un diviseur de *b*
- *b* est divisible par *a*

3. Ensemble des diviseurs d'un entier

• Notations :

$b \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{D}(b)$: ensemble des diviseurs de *b*

$\mathcal{D}(b) = \{a \in \mathbb{Z} / a \mid b\}$

$\mathcal{D}^+(b) = \{a \in \mathbb{N} / a \mid b\}$

• Propriété :

Pour tout entier $b \in \mathbb{Z}^*$, $\mathcal{D}(b)$ est un ensemble fini contenant 1 et *b*.

• Vocabulaire :

$6 = 2 \times 3$

2 et 3 sont des diviseurs associés de 6.

• On a : $\mathcal{D}(0) = \mathbb{Z}$.

4. Parité d'un entier

• Définition :

Un entier pair est un entier qui est divisible par 2.

Un entier impair est un entier qui n'est pas divisible par 2.

• Propriété :

n pair $\Leftrightarrow$ $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

n impair $\Leftrightarrow$ $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

5. Propriétés

a, *b*, *c* sont des entiers relatifs quelconques.

• **Transitivité :**

Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

• **Réflexivité :** $a \mid a$

• Si $a \mid b$, alors, pour tout entier λ, $a \mid \lambda b$.

• $(a \mid b$ et $b \mid a) \Leftrightarrow (a = b$ ou $a = -b)$

• $(a \mid b$ et $a \mid c) \Rightarrow a \mid \lambda b + \mu c$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$.

7. Nombres premiers

• **Définition :**

On dit qu'un entier naturel est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

• **Liste des premiers nombres premiers :**

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 etc.

8. « Lemme $a = bc + d$ »

Soit a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a = bc + d$.

b divise a si et seulement si b divise d.

Faire les gestes correspondants pour mémoriser.

8. Critères de divisibilité

Un entier naturel est divisible par :

• 2 si et seulement si il se termine par un chiffre pair (0, 2, 4, 6 ou 8).

• 3 si et seulement si la somme des chiffres qui composent son écriture en base dix est divisible par 3.

• 4 si et seulement si le nombre formé par les deux derniers chiffres de son écriture en base dix est divisible par 4.

• 5 si et seulement si il se termine par 0 ou 5.

• 6 si et seulement si il est divisible à la fois par 2 et par 3.

• 9 si et seulement si la somme des chiffres qui composent son écriture en base dix est divisible par 9.

• 10 si et seulement si il se termine par un 0.

• 25 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres de son écriture en base dix est divisible par 25.

• 10^n (n entier naturel supérieur ou égal à 1) si et seulement si il se termine par n 0.

• 2^n (n entier naturel supérieur ou égal à 1) si et seulement si le nombre formé par les n derniers chiffres de son écriture en base dix est divisible par 2^n.

• 5^n (n entier naturel supérieur ou égal à 1) si et seulement si le nombre formé par les n derniers chiffres de son écriture en base dix est divisible par 5^n.

9. Entiers premiers entre eux

• **Définition :**

On dit que deux entiers relatifs a et b sont **premiers entre eux** pour exprimer que leurs seuls diviseurs communs sont 1 et – 1.

• **Propriété :**

Soit a et b deux entiers relatifs.
S'il existe une combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers relatifs égale à 1 ou – 1, alors a et b sont premiers entre eux.

• **Lemme :**

Deux entiers relatifs consécutifs sont premiers entre eux.

10. Lemme d'Euclide

Soit a, b, c, d des entiers relatifs tels que $a = bc + d$.
L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à b et d.

Faire les gestes correspondants pour mémoriser.

11. Test de divisibilité dans un programme

Avec partie entière ou partie décimale (à compléter, je le note le mercredi 13 septembre 2017)

12. Complément sur les diviseurs associés positifs d'un entier naturel

Propriété :

Soit d et d' deux diviseurs associés positifs d'un entier naturel strictement positif n.
L'un au moins des deux diviseurs est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Cette propriété sera utilisée ultérieurement en programmation.

Elle provient du résultat suivant : « Si deux réels positifs ont … ».