1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur la valeur absolue (2)

1 Calculer à l'aide de la valeur absolue la distance entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{4}{3}$.

2 Écrire sans barre de valeur absolue $A=|2\pi-5|$ et $B=|8-3\pi|$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes <u>sans calcul</u> à l'aide de la droite numérique réelle :
$|x-4|=1$ (1) ; $|x+3|=2$ (2).

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes à l'aide de la droite numérique réelle :
$|x-7|\leqslant 5$ (1) ; $|x+2|>3$ (2).

5 Calculer la valeur exacte de $a=\sqrt{(3-\pi)^2}$ et $b=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sqrt{x^2-6x+9}=2$ (1) ; $\sqrt{4+4x+x^2}=3$ (2).

7 Recopier et compléter en couleur le tableau :

Valeur absolue	Distance	Encadrement	Intervalle
$\lvert x-5\rvert \leqslant 3$	$d(x;5)\leqslant 3$	$2\leqslant x\leqslant 8$	$x\in[2;8]$
$\lvert x-1\rvert<5$			
$\lvert x+7\rvert\leqslant 2$			
$\lvert x+1\rvert<4$			

8 Recopier et compléter en couleur le tableau :

Valeur absolue	Distance	Encadrement	Intervalle
$\lvert x-2\rvert\leqslant 1$			
	$d(x;-3)<5$		
		$8\leqslant x\leqslant 10$	
			$x\in\,]-1;5[$

9 Recopier et compléter en couleur le tableau :

Valeur absolue	Encadrement	Intervalle
$\lvert x\rvert\leqslant 4$	$-4\leqslant x\leqslant 4$	$x\in[-4;4]$
$\lvert x\rvert<2$		
	$-1\leqslant x\leqslant 1$	
		$x\in[-3;3]$

10 Recopier et compléter en couleur le tableau :

Intervalle ou réunion d'intervalles	Inégalité(s)	Représentation	Valeur absolue
$]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$	$x<3$ ou $x>5$	3 4 5	$\lvert x-4\rvert>1$
	$-2\leqslant x\leqslant 2$		
		– 2 ,7 – 1,3	
			$\lvert x+3\rvert<0{,}01$
	$x\leqslant -\frac{1}{3}$ ou $x\geqslant \frac{4}{3}$		

11 Déterminer le centre et le rayon des intervalles [6 ; 12], [– 4 ; 7] et $\left[-2;\frac{5}{2}\right]$.

12 Soit D un axe de repère (O, I) tel que OI = 1. Soit A, B, C les points de D d'abscisses respectives 5,7 ; – 1,7 ; – 2 ,8.
Calculer les distances AB, BC et CA.

13 On sait que 8,2155 est une valeur approchée de x à 3×10^{-4} près et que – 3,46 est une valeur approchée de y à 5×10^{-2} près.
Donner le meilleur encadrement possible de x et y.

14 1°) Un réel x vérifie $4{,}083\leqslant x\leqslant 4{,}087$. Déterminer une valeur approchée de x à 2×10^{-3} près.

2°) Un réel y vérifie $-5{,}09\leqslant y\leqslant -5{,}01$. Déterminer une valeur approchée de y à 4×10^{-2} près.

15 Soit x un réel.

1°) Exprimer $|x-4|$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de x.

2°) Exprimer $|5-2x|$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de x.

Corrigé

1 Calculer la distance de deux nombres

Cet exercice a pour but d'utiliser la formule de la distance à l'aide de la valeur absolue.

On se réfère à la propriété :

La distance entre deux réels quelconques est donnée par : d(a ; b) = | $b - a$ | = | $a - b$ |.

L'intérêt de cette formule c'est que l'on n'a pas besoin de comparer les nombres.

$$\mathrm{d}\left(\frac{5}{7};\frac{4}{3}\right)=\left|\frac{5}{7}-\frac{4}{3}\right|=\left|-\frac{13}{21}\right|=\frac{13}{21}$$

2 Calculs de valeurs absolues

On se réfère à la propriété qui permet d'enlever les barres de valeur absolue :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

★ $A = |2\pi - 5|$

$2\pi - 5 > 0$ car $\pi > \dfrac{5}{2}$

Donc $A = 2\pi - 5$.

★ $B = |8 - 3\pi|$

$8 - 3\pi < 0$ car $\dfrac{8}{3} < \pi$

$B = -(8 - 3\pi) = 3\pi - 8$

Parenthèses

- On laisse les valeurs exactes (on laisse π).
- Touche de la calculatrice : abs ou $|x|$

Sur calculatrice TI 83 plus : math → num → abs(

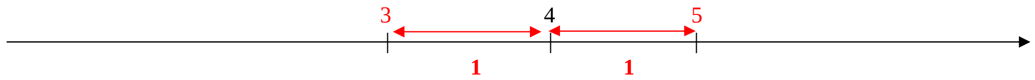
Sur calculatrice Casio : option → num → abs

3 Résolution « graphique » d'équations avec valeurs absolues

★ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 4| = 1$ (1).

(1) signifie que la distance entre x et 4 est égale à 1.
d(x ; 4) = 1

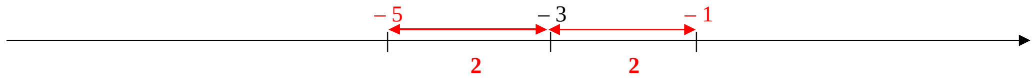
On trace un axe (droite numérique réelle).
On place 4.
De part et d'autre, on marque une distance de 1.



L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \{3 ; 5\}$.

★ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 3| = 2$ (2).

(2) signifie que la distance entre x et – 3 est égale à 2.
d(x ; – 3) = 2



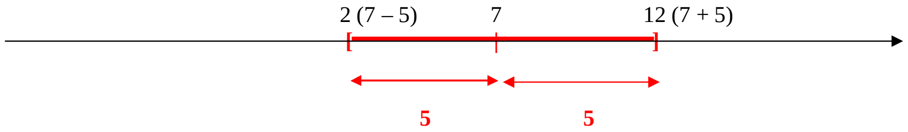
L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = \{-5 ; -1\}$.

4 Résolutions graphiques d'inéquations avec des valeurs absolues

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x - 7| \leq 5$ (1).

(1) signifie que la distance entre x et 7 est inférieure ou égale à 5.

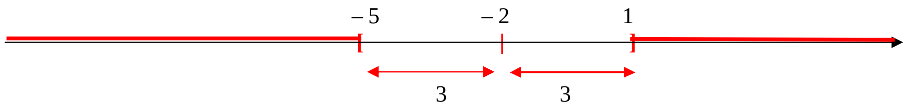
On trace un axe.
On place 7.
De part et d'autre, on marque une distance de 5.



L'ensemble des solutions de (1) est S_1 = [2 ; 12].

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|\,x+2\,| > 3$ (2).**

(2) signifie que la distance entre x et – 2 est strictement supérieure à 3.



L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 =]-\infty\,;-5[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

$\boxed{5}$ Simplifications

On applique la propriété : $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$.

Tracer les racines carrées à la règle.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(3-\pi)^2} \\ &= |\,3-\pi\,| \\ &= -(3-\pi) \quad \text{car } 3-\pi<0 \\ &= \pi-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} \\ &= \left|\,2-\sqrt{5}\,\right| \\ &= -\left(2-\sqrt{5}\right) \quad \text{car } 2-\sqrt{5}<0 \\ &= \sqrt{5}-2 \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Résolutions d'équations avec des racines carrées

Tracer les racines carrées à la règle.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2-6x+9} = 2$ (1).**

L'équation (1) est successivement équivalente à :
$\sqrt{(x-3)^2} = 2$
$|\,x-3\,| = 2$
$x - 3 = 2$ ou $x - 3 = -2$
$x = 5$ ou $x = 1$

L'ensemble des solutions de (1) est S_1 = {1 ; 5}.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{4+4x+x^2} = 3$ (2).**

L'équation (2) est successivement équivalente à :
$\sqrt{(2+x)^2} = 3$
$|\,2+x\,| = 3$
$2 + x = 3$ ou $2 + x = -3$
$x = 1$ ou $x = -5$

L'ensemble des solutions de (2) est S_2 = {– 5 ; 1}.

N.B. : On peut aussi utiliser une droite pour résoudre.

Les exercices $\boxed{7}$ et $\boxed{8}$ font revoir les intervalles.
Pour ces deux exercices, on peut s'aider d'une droite pour répondre.

$\boxed{7}$ Intervalles et valeur absolue

Passage : valeur absolue → distance → encadrement → intervalle

Valeur absolue	Distance	Encadrement	Intervalle
$\|\,x-5\,\| \leqslant 3$	$\mathrm{d}(x\,;5) \leqslant 3$	$2 \leqslant x \leqslant 8$	$x \in [2\,;8]$
$\|\,x-1\,\| < 5$	**d(x ; 1) < 5**	**– 4 < x < 6**	**$x \in$] – 4 ; 6[**
$\|\,x+7\,\| \leqslant 2$	**d(x ; – 7) ⩽ 2**	**– 9 ⩽ x ⩽ – 5**	**$x \in$ [– 9 ; – 5]**
$\|\,x+1\,\| < 4$	**d(x ; – 1) < 4**	**– 5 < x < 3**	**$x \in$] – 5 ; 3[**

8 Intervalles et valeur absolue

Valeur absolue	Distance	Encadrement	Intervalle
$\lvert x-2 \rvert \leqslant 1$	**d(x ; 2) ⩽ 1**	**$1 \leqslant x \leqslant 3$**	**$x \in [1 ; 3]$**
$\lvert x+3 \rvert < 5$	$d(x;-3)<5$	**$-8 < x < 2$**	**$x \in]-8 ; 2[$**
$\lvert x-9 \rvert \leqslant 1$	**d(x ; 9) ⩽ 1**	$8 \leqslant x \leqslant 10$	**$x \in [8 ; 10]$**
$\lvert x-2 \rvert < 3$	**d(x ; 2) < 3**	**$-1 < x < 5$**	$x \in]-1;5[$

• Pour l'inégalité $8 \leqslant x \leqslant 10$, on traduit facilement $x \in [8 ; 10]$.
Pour passer en valeur absolue et en distance, on calcule le centre de l'intervalle [8 ; 10] (9) et son rayon (1).

• Pour $x \in]-1;5[$, on écrit immédiatement l'encadrement $-1 < x < 5$.
Pour passer en valeur absolue et en distance, on calcule le centre de l'intervalle]– 1 ; 5 [(2) et son rayon (3).

Rappel :

Pour un intervalle [a ; b] :

• le centre est égal à : $c = \dfrac{a+b}{2}$;

• le rayon est égal à : $r = \dfrac{b-a}{2}$.

9 Intervalles et valeur absolue

Valeur absolue	Encadrement	Intervalle
$\lvert x \rvert \leqslant 4$	$-4 \leqslant x \leqslant 4$	$x \in [-4;4]$
$\lvert x \rvert < 2$	**$-2 < x < 2$**	**$x \in]-2;2[$**
$\lvert x \rvert \leqslant 1$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	**$x \in [-1;1]$**
$\lvert x \rvert \leqslant 3$	**$-3 \leqslant x \leqslant 3$**	$x \in [-3;3]$

10 Intervalles et valeur absolue

Intervalle ou réunion d'intervalles	Inégalité(s)	Représentation	Valeur absolue
$]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$	$x < 3$ ou $x > 5$	3 4 5	$\lvert x-4 \rvert > 1$
$[-2 ; 2]$	$-2 \leqslant x \leqslant 2$	**– 2 0 2**	$\lvert x \rvert \leq 2$
$[-2{,}7 ; -1{,}3]$	$-2{,}7 \leq x \leq -1{,}3$	– 2 ,7 – 2 – 1,3	$\lvert x+2 \rvert \leq 0{,}7$
$]-3{,}01 ; -2{,}99[$	$-3{,}01 < x < -2{,}99$	**– 3,01 – 3 – 2,99**	$\lvert x+3 \rvert < 0{,}01$
$\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3};+\infty\right[$	$x \leqslant -\dfrac{1}{3}$ ou $x \geqslant \dfrac{4}{3}$	$-\dfrac{1}{3}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{4}{3}$	$\left\lvert x-\dfrac{1}{2} \right\rvert > \dfrac{5}{6}$

11 Centre et rayon d'un intervalle

Déterminons le centre et le rayon des intervalles [6, 12], [– 4, 7] et $\left[-2, \dfrac{5}{2}\right]$.

RAPPEL :

Pour un intervalle [a, b] :

• le centre est égal à : $c = \dfrac{a+b}{2}$;

• le rayon est égal à : $r = \dfrac{b-a}{2}$.

On peut aussi calculer le rayon de l'intervalle en faisant la différence entre l'extrémité droite et le centre de l'intervalle (rayon = extrémité droite – centre).

• Intervalle [6, 12] :

$\dfrac{12+6}{2} = 9$ Le centre est **9**.

$\dfrac{12-6}{2} = 3$ ou 12 – 9 = 3 Le rayon est **3**.

• Intervalle [– 4, 7] :

$\dfrac{-4+7}{2}=\dfrac{3}{2}$ Le centre est $\dfrac{3}{2}$.

$\dfrac{7-(-4)}{2}=\dfrac{11}{2}$ ou $7-\dfrac{3}{2}=\dfrac{14-3}{2}=\dfrac{11}{2}$ Le rayon est $\dfrac{11}{2}$.

• Intervalle $\left[-2, \dfrac{5}{2}\right]$:

$\dfrac{-2+\dfrac{5}{2}}{2}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{2}$ Le centre est $\dfrac{1}{4}$.

$\dfrac{\dfrac{5}{2}-(-2)}{2}=\dfrac{\dfrac{9}{2}}{2}=\dfrac{9}{4}$ ou $\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{10-1}{4}=\dfrac{9}{4}$ Le rayon est $\dfrac{9}{4}$.

Autre rédaction possible :

Pour chaque intervalle proposé, on note R le rayon et C le centre.

• Intervalle [6, 12] :

$R=\dfrac{12-6}{2}=5$ C = R + 6 = 9

• Intervalle [– 4, 7] :

$R=\dfrac{7+4}{2}=\dfrac{11}{2}$ $C = R - 4 = \dfrac{3}{2}$

• Intervalle $\left[-2, \dfrac{5}{2}\right]$:

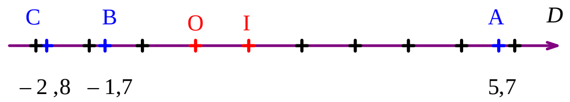
$R=\dfrac{\dfrac{5}{2}+2}{2}=\dfrac{9}{4}$ $C = R - 2 = \dfrac{1}{4}$

12 Calculs de distances sur un axe

A(5,7) ; B(– 1,7) ; C(– 2 ,8)

Calculons les distances AB, BC et CA.

On peut faire un graphique mais cela n'est pas du tout indispensable puisque l'on calcule les distances en utilisant la règle du cours (l'axe sert à visualiser).



$x_A = 5,7$
$x_B = -1,7$
$x_C = -2,8$

1ère méthode :

AB = *d* (5,7 ; – 1,7)
= 5,7 + 1,7
= 7,4

BC = *d* (– 1,7 ; – 2,8)
= – 1,7 +2,8
= 1,1

CA = *d* (– 2,8 ; 5,7)
= 5,7 + 2,8
= 8,5

2e méthode : utilisation de la valeur absolue (meilleure)

$AB = |x_B - x_A| = |5,7+1,7| = 7,4$
$BC = |x_C - x_B| = |-2,8+1,7| = 1,1$
$CA = |x_A - x_C| = |5,7+2,8| = 8,5$

$\boxed{13}$ Valeurs approchées ; encadrements

Rappel de la définition :

> *x* est un réel donné.
>
> *a* est une valeur approchée de *x* à la précision *r* signifie que d(*x*, *a*) $\leqslant r$ ou | *x* – *a* | $\leqslant r$.

Commentaire sur cette définition : pour une valeur approchée, le signe est toujours $\leqslant$.

• 8,2155 est une valeur approchée de *x* à 3×10^{-4} près.

On a donc les inégalités successives suivantes :

$d\left(x\,;8,2155\right)\leq 3\times10^{-4}$

$\left|\,x-8,2155\,\right|\leq 3\times10^{-4}$

$-3\times10^{-4}\leq x-8,2155\leq 3\times10^{-4}$

$8,2155-3\times10^{-4}\leq x\leq 8,2155+3\times10^{-4}$

$8,2152\leq x\leq 8,2158$

• – 3,46 est une valeur approchée de *y* à 5×10^{-2} près.

On a donc les inégalités successives suivantes :

$d\left(y\,;-3,46\right)\leq 5\times10^{-2}$

$\left|\,y+3,46\,\right|\leq 5\times10^{-2}$

$-5\times10^{-2}\leq y+3,46\leq 5\times10^{-2}$

$-3,46-5\times10^{-2}\leq y\leq -3,46+5\times10^{-2}$

$-3,51\leq y\leq -3,41$

Remarque : on peut employer le terme de « valeur approchée » aussi bien que celui d'« approximation ».

Variante :

• 8,2155 est une valeur approchée de *x* à 3×10^{-4} près.

On a donc les inégalités successives suivantes :

$d\left(x\,;8,2155\right)\leq 3\times10^{-4}$

$\left|\,8,2155-x\,\right|\leq 3\times10^{-4}$

$-3\times10^{-4}\leq 8,2155-x\leq 3\times10^{-4}$

$-8,2158\leq -x\leq -8,2152$

$8,2158\geq x\geq 8,2152$

$8,2152\leq x\leq 8,2158$

• – 3,46 est une valeur approchée de *y* à 5×10^{-2} près.

On a donc les inégalités successives suivantes :

$d\left(y\,;-3,46\right)\leq 5\times10^{-2}$

$\left|\,-3,46-y\,\right|\leq 5\times10^{-2}$

$-5\times10^{-2}\leq -3,46-y\leq 5\times10^{-2}$

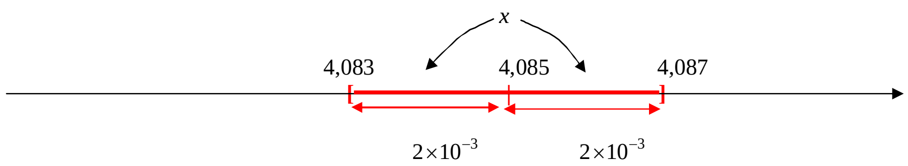
etc.

$\boxed{14}$ Valeurs approchées

1°) $4,083\leq x\leq 4,087$ (1)

Déterminons une valeur approchée de *x* à 2×10^{-3} près.

On fait un schéma. Ce schéma n'est pas obligatoire mais il aide à comprendre.



Sur ce schéma, on fait apparaître l'intervalle [4,083 ; 4,087].
On calcule le centre et le rayon de l'intervalle :

$\dfrac{4,083+4,087}{2}=4,085$ (centre)

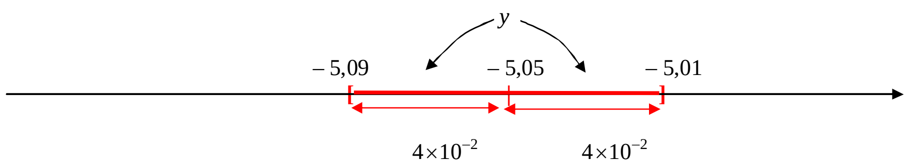
$\dfrac{4,087-4,083}{2}=0,002$ (rayon)

(1) est équivalente à $\left|\,x-4,085\,\right|\leq 2\times10^{-3}$

Cette dernière inégalité prouve que 4,085 est une valeur approchée de *x* à 2×10^{-3} près.

2°) $-5,09\leq y\leq -5,01$ (2)

Déterminons une valeur approchée de *y* à 4×10^{-2} près.



Sur ce schéma, on fait apparaître l'intervalle [– 5,09 ; – 5,01].

On calcule le centre et le rayon de l'intervalle :

$$\frac{-5,09-5,01}{2}=-5,05 \quad \text{(centre)}$$
$$\frac{-5,01-(-5,09)}{2}=0,04 \quad \text{(rayon)}$$

(2) est équivalente à $|\, y+5,05 \,| \leq 4\times10^{-2}$

Cette dernière inégalité prouve que – 5,05 est une valeur approchée de y à 4×10^{-2} près.

$\boxed{15}$ Expression d'une quantité sans barres de valeur absolue

1°) **Exprimons $|\, x-4 \,|$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de x.**

On détermine d'abord le signe de $x-4$ suivant les valeurs de x.

On cherche la valeur de x qui annule $x-4$.

$x-4=0$
$x=4$

On dresse un tableau de signes.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $x-4$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-4 \rvert$		$-(x-4)=4-x$	0	$x-4$	

$$|\, x-4 \,| = \begin{cases} x-4 \text{ si } x \geq 4 \\ 4-x \text{ si } x \leq 4 \end{cases}$$

2°) **Exprimons $|\, 5-2x \,|$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de x.**

Signe de $5-2x$

On cherche la valeur de x qui annule $5-2x$.

$5-2x=0$
$x=\frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $5-2x$		$+$	0	$-$	
$\lvert 5-2x \rvert$		$5-2x$	0	$-(5-2x)=2x-5$	

$$|\, 5-2x \,| = \begin{cases} 5-2x \text{ si } x \leq \frac{5}{2} \\ 2x-5 \text{ si } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$