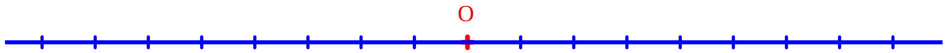
$1^{\text{ère}}$ S

Valeur absolue (1)

I. Quelques situations concrètes

1°) Un problème de rencontre

On considère une droite.
On marque un point O sur cette droite.

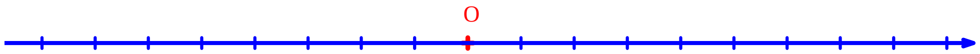


Imaginons que la droite représente une route rectiligne, le point O un certain endroit, l'unité un kilomètre.

Serait-ce une bonne idée, pour des gens qui veulent se retrouver, de se donner rendez-vous à 3 km de O *?*

Non, parce qu'il y a deux endroits.

On peut convenir d'un sens de parcours positif marqué par une flèche.
Les points sont alors repérés par des nombres.



Les deux endroits correspondent aux points d'abscisses + 3 et – 3.

2°) Un problème de trajet

On imagine le trajet suivant :
On part de O, puis on effectue un déplacement de 3 unités dans le sens positif, suivies de 5 unités dans le sens positif, puis de 7 unités en sens contraire, puis de 2 toujours dans le sens négatif, de 4 à nouveau dans le sens positif, de 6 dans le sens négatif, puis de 1 à nouveau dans le sens positif.

$3+5-7-2+4-6+1=-2$

Imaginons que O représente la position d'un tout petit village et qu'un camion-livreur fait tous ces trajets successifs.

Que représente ce résultat ?

Ce nombre indique la position finale.

3°) Un problème de trajet (bis)

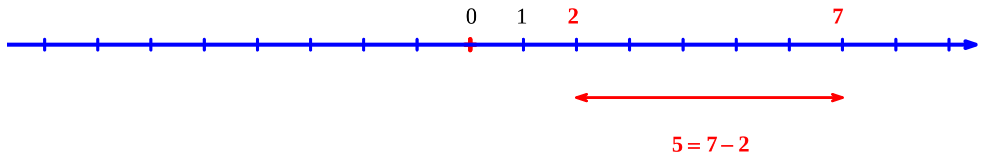
Quelle est la distance totale parcourue ?

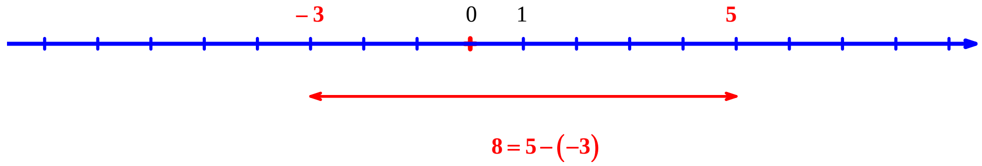
valeur absolue de 3 + valeur absolue de 5 + valeur absolue de (– 7) + valeur absolue de (– 2) + valeur absolue de 4 + valeur absolue de – 6 + valeur absolue de 1 $=3+5+7+2+4+6+1=28$.

La distance totale parcourue est de 28 km.

II. Distance entre deux réels

1°) Exemples





2°) Définition

La **distance** entre deux réels quelconques est la différence entre le plus grand et le plus petit.

3°) Exercice

Calculer

- la distance entre 1 et 4 : $\mathbf{d}(\mathbf{1}\,;\mathbf{4})=4-1=3$
- la distance entre 5 et 3 : $\mathbf{d}(\mathbf{5}\,;\mathbf{3})=5-3=2$
- la distance entre 1 et – 7 : $\mathbf{d}(\mathbf{1}\,;-\mathbf{7})=1-(-7)=1+7=8$
- la distance entre – 4 et – 2 : $\mathbf{d}(-\mathbf{4}\,;-\mathbf{2})=-2-(-4)=-2+4=2$

4°) Remarques

Le résultat d'une distance est toujours positif ou nul.

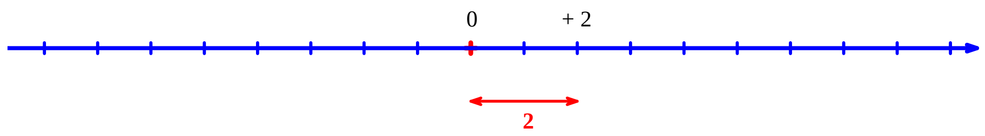
La distance entre deux réels x et y quelconques se note $\mathrm{d}(x\,;y)$ (on lit « distance entre x et y »).

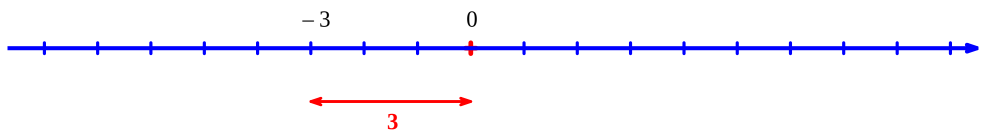
De manière évidente, on a : $\mathrm{d}(x\,;y)=\mathrm{d}(y\,;x)$.

III. Valeur absolue d'un réel

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser à la distance entre 0 (qui est un nombre très important) et un nombre (quelconque).

1°) Exemples





2°) Définition

La distance entre un réel quelconque x et 0 est appelée **la valeur absolue** de x.

3°) Exercice

Compléter

- valeur absolue de $+2 = d(0\,;+2) = 2-0 = 2$
- valeur absolue de $-3 = d(0\,;-3) = 0-(-3) = 0+3 = 3$
- valeur absolue de $-5,7 = d(0\,;-5,7) = 0-(-5,7) = 5,7$

4°) Remarques

● **Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul.** Ceci découle directement de la définition puisqu'une valeur absolue est une distance.

● **La valeur absolue d'un décimal relatif est égale à sa partie numérique sans tenir compte du signe.**

5°) Utilisation de la calculatrice

● Sur calculatrice TI 83 plus

- appuyer sur la touche « math »
- aller dans la section « NUM »
- utiliser le premier choix qui se présente : abs(

● Casio Graph 35 + : option → num → abs

IV. Notation

1°) Barres de valeur absolue

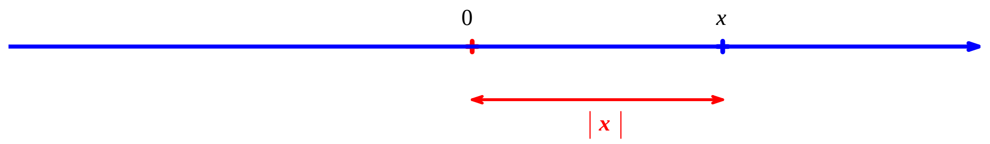
La valeur absolue d'un nombre x est notée $|\,x\,|$.

Ainsi :

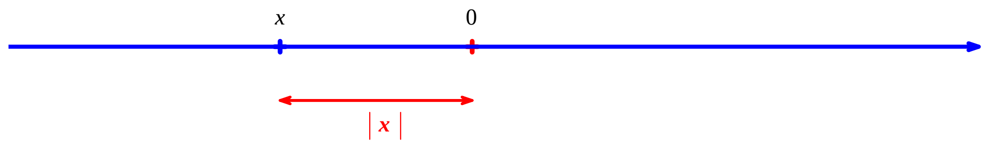
valeur absolue de $x = |\,x\,| = d(0\,;\,x)$

On retiendra les images mentales suivantes :

● $x \geqslant 0$



● $x \leqslant 0$



2°) Exemples

$|+2| = 2$

$|-3| = 3$

$|-5,7| = 5,7$

$|1-6| = |-5| = 5$ (on peut faire des calculs à l'intérieur d'une valeur absolue)

3°) Remarque

On a dit dans le paragraphe **IV.** que le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul.
Il s'agit bien du résultat ; le nombre entre les deux barres, lui, peut être positif ou négatif.
Autrement dit, entre les barres, on peut mettre aussi bien un nombre positif qu'un nombre négatif.

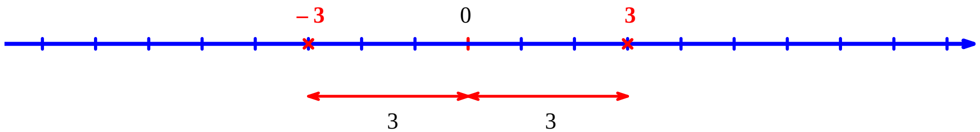
V. Exemples de résolutions d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues en utilisant la définition

1°) Exemple 1

Résoudre l'équation $|x| = 3$ (1).

(1) signifie que la distance entre 0 et x est égale à 3.

$$\mathrm{d}(0\,;x) = 3$$



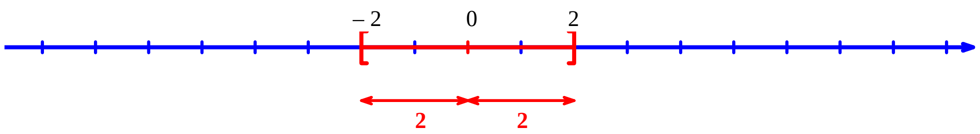
L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \{-3\,;3\}$.

2°) Exemple 2

Résoudre l'inéquation $|x| \leqslant 2$ (2).

(2) signifie que la distance entre 0 et x est inférieure ou égale à 2.

$$\mathrm{d}(0\,;x) \leqslant 2$$



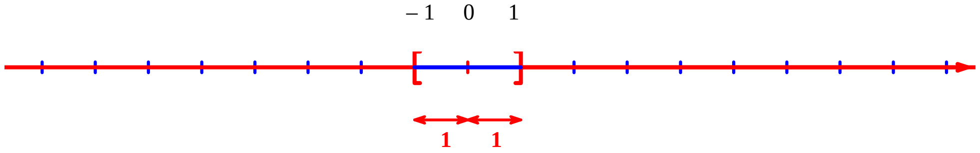
L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = [-2\,;2]$.

3°) Exemple 3

Résoudre l'inéquation $|x| > 1$ (3).

(3) signifie que la distance entre 0 et x est strictement supérieure à 1.

$$\mathrm{d}(0\,;x) > 1$$



L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

VI. Propriétés immédiates

1°) Propriété 1

x est un réel quelconque.
On a : $|-x| = |x|$.

2°) Propriété 2

x et y sont deux réels quelconques.

On a :

$|x| = |y|$ si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$.

VII. Règle pour la résolution d'équations et d'inéquations avec valeur absolue

a est un réel strictement positif fixé.

$|X| = a$ équivaut à $X = a$ ou $X = -a$.

$|X| \leqslant a$ équivaut à $-a \leqslant X \leqslant a$.

$|X| \geqslant a$ équivaut à $X \leqslant -a$ ou $X \geqslant a$.

VIII. Exemples de résolutions d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues par le calcul

1°) Exemple 1

Résoudre l'équation $\left| x-2 \right| = 3$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x-2=3$ ou $x-2=-3$
$x=5$ ou $x=-1$

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \{5\,;-1\}$.

2°) Exemple 2

Résoudre l'inéquation $\left| x-1 \right| \leqslant 2$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

$-2 \leqslant x-1 \leqslant 2$
$-1 \leqslant x \leqslant 3$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = [-1\,;3]$.

3°) Exemple 3

Résoudre l'inéquation $| x + 4 | > 5$ (3).

(3) est successivement équivalente à :

$x+4<-5$ ou $x+4>5$
$x<-9$ ou $x>1$

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 =]-\infty\,;-9[\cup]1\,;+\infty[$.

Appendice : valeur absolue et outils de calcul

• sur calculatrice

• sur logiciel de calcul formel XCas

• sur tableur Excel

• sur Geogebra

Histoire de la valeur absolue

• Livre Symbole 1ère S édition 2011 page 58 (Un peu d'histoire…)

Les différentes définitions de la valeur absolue

Jusqu'à la fin du XVIIIe siècle, la notion de valeur absolue n'existe pas encore, mais les mathématiciens en parlent implicitement en écrivant par exemple qu'un nombre négatif est construit à partir « d'un signe » et « d'un nombre », ou encore en parlant de « la distance à partir de zéro ». C'est le mathématicien Augustin Louis Cauchy (1789-1857) qui introduit en 1821 le concept de valeur absolue dans son cours d'analyse de l'École Polytechnique.

Avant la définition proposée par Cauchy, on disait qu'un réel était construit à partir « d'un signe » et « d'un nombre ».

• Livre Déclic 1ère S édition 2011 page 47

On doit la notation $|x|$ pour la valeur absolue d'un réel x à **Karl Weierstrass** (1815-1897), mathématicien allemand, généralement considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XIXe siècle.