1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur la valeur absolue (3)

$\boxed{1}$ Calculer la distance entre les nombres :

a) – 1 et – 5 b) 8 et – 1 c) $\frac{1}{3}$ et $-\frac{10}{3}$ d) $\sqrt{8}$ et $\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ Écrire les réels suivants sans utiliser de barres de valeur absolue (recopier les égalités) :

$|3| = \ldots\ldots$; $|-2| = \ldots\ldots$; $|-3{,}1| = \ldots\ldots$; $\left|-\frac{2}{5}\right| = \ldots\ldots$; $|-\pi| = \ldots\ldots$; $\left|(-5)^2\right| = \ldots\ldots$; $\left|10^{-3}\right| = \ldots\ldots$;

$\left|-10^5\right| = \ldots\ldots$; $-\left|-\frac{4}{5}\right| = \ldots\ldots$.

$\boxed{3}$ Calculer :

$\mathrm{A} = \left|-2-\frac{1}{2}\right|$; $\mathrm{B} = |3-8|$; $\mathrm{C} = 2\left|3-\frac{1}{2}\right|-1$; $\mathrm{D} = \left|1-\frac{4}{3}\right| - \frac{11}{2} \times \left|2-\frac{1}{3}-\frac{7}{4}\right|$.

$\boxed{4}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes à l'aide de la droite réelle :

$|x| = \frac{5}{2}$ (1) ; $|x| = -1$ (2) ; $|x| = 0$ (3).

$\boxed{5}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes à l'aide de la droite réelle :

$|x| \leqslant 4$ (1) ; $|x| > \frac{8}{3}$ (2) ; $|x| \geqslant 3$ (3).

$\boxed{6}$ Soit x un réel strictement positif quelconque.

1°) Ranger dans l'ordre croissant les nombres : 1, $\frac{x}{x+1}$, $\frac{x+1}{x}$.

2°) Lequel des réels $\frac{x}{x+1}$ et $\frac{x+1}{x}$ est le plus proche de 1 ?

$\boxed{7}$ On considère l'expression $\mathrm{A} = |x+2y| - |x-y|$.
Calculer A pour :

a) $x = 4$; $y = -1$ b) $x = \sqrt{5}$; $y = 2\sqrt{5}$.

$\boxed{8}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$|x| \leqslant -2$ (1) ; $|x| > -1$ (2) ; $|x| \leqslant 0$ (3).

$\boxed{9}$ Résoudre le système $\begin{cases} 3|x| - 2|y| = -5 \\ 5|x| + |y| = 9 \end{cases}$.

Indication : Effectuer le changement d'inconnues $X = |x|$ et $Y = |y|$.

$\boxed{10}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ par le calcul les équations suivantes :

$|x+5| = 1$ (1) ; $|3x-2| = 4$ (2) ; $|x+2| = -5$ (3) ; $\left|x^2-3\right| = 1$ (4) ; $|1-x| = \sqrt{2}$ (5).

$\boxed{11}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ par le calcul les inéquations suivantes :

$|x+7| < 9$ (1) ; $|2x-1| \geqslant 3$ (2) ; $|3x| \geqslant 2$ (3) ; $|2x-1| < \frac{1}{2}$ (4) ; $|1-4x| < -1$ (5).

$\boxed{12}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations :

(I) $\begin{cases} |2x-3| \leqslant 1 \\ |x+1| > 5 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} |x-2| < 9 \\ |x+1| \geqslant 4 \end{cases}$ (III) $\begin{cases} |x-1| < 8 \\ |x-2| \geqslant 4 \end{cases}$

$\boxed{13}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $|2x-1| = |x+4|$ (1) ; $|3-x| = |x|$ (2).

Corrigé

1 Calcul de la distance entre deux nombres

• On applique la définition de la distance de deux réels : la distance de deux réels est la différence entre le plus grand et le plus petit.

• On utilise la notation $\mathrm{d}(x\,;\,y)$ pour désigner la distance entre deux réels x et y.

a) **-1 et -5**

$-5<-1$ donc

$\mathrm{d}(-1\,;-5)=-1-(-5)$

$=-1+5$

$=\mathbf{4}$

b) **8 et -1**

$8>-1$ donc

$\mathrm{d}(8\,;-1)=8-(-1)$

$=8+1$

$=\mathbf{9}$

c) **$\frac{1}{3}$ et $-\frac{10}{3}$**

$\frac{1}{3}>-\frac{10}{3}$ donc

$\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{10}{3}\right)=\frac{1}{3}-\left(-\frac{10}{3}\right)$

$=\frac{1}{3}+\frac{10}{3}$

$=\mathbf{\frac{11}{3}}$

d) **$\sqrt{8}$ et $\sqrt{2}$**

$\sqrt{8}>\sqrt{2}$ donc

$\mathrm{d}\left(\sqrt{8}\,;\sqrt{2}\right)=\sqrt{8}-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}$

2 Valeurs absolues de nombres

$|3|=\mathbf{3}$; $|-2|=\mathbf{2}$; $|-3{,}1|=\mathbf{3{,}1}$; $\left|-\frac{2}{5}\right|=\mathbf{\frac{2}{5}}$; $|-\pi|=\pi$; $\left|(-5)^2\right|=\mathbf{25}$; $\left|10^{-3}\right|=\mathbf{10^{-3}}$; $\left|-10^5\right|=\mathbf{10^5}$;

$-\left|-\frac{4}{5}\right|=-\mathbf{\frac{4}{5}}$

On écrit des barres de valeur absolue juste pour le 1er membre.

3 Calculs d'expressions comportant des valeurs absolues

$A=\left|-2-\frac{1}{2}\right|$

$=\left|-\frac{5}{2}\right|$

$=\mathbf{\frac{5}{2}}$

$B=|3-8|$

$=|-5|$

$=\mathbf{5}$

$C=2\left|3-\frac{1}{2}\right|-1$

$=2\left|\frac{5}{2}\right|-1$

$=\cancel{2}\times\frac{5}{\cancel{2}}-1$ *

$=5-1$

$=\mathbf{4}$

* on simplifie

$D=\left|1-\frac{4}{3}\right|-\frac{11}{2}\times\left|2-\frac{1}{3}-\frac{7}{4}\right|$

$=\left|-\frac{1}{3}\right|-\frac{11}{2}\times\left|\frac{24-4-21}{12}\right|$

$=\frac{1}{3}-\frac{11}{2}\times\left|-\frac{1}{12}\right|$

$=\frac{1}{3}-\frac{11}{2}\times\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{3}-\frac{11}{24}$

$=\frac{8-11}{24}$

$=-\frac{3}{24}$

$=-\mathbf{\frac{1}{8}}$

Commentaires :

• On a le droit de calculer à l'intérieur des valeurs absolues.
• On simplifie chaque fois que possible le résultat final.
• Pour le calcul de l'expression C, la valeur absolue se comporte comme une parenthèse ($2\times\ldots$).
• Attention à ne pas appliquer la « propriété-en-acte » : $|2-5|$ n'est pas égal à $|2|-|5|$.

4 Résolutions d'équations avec des valeurs absolues

À chaque fois, on doit mettre une phrase d'explication.

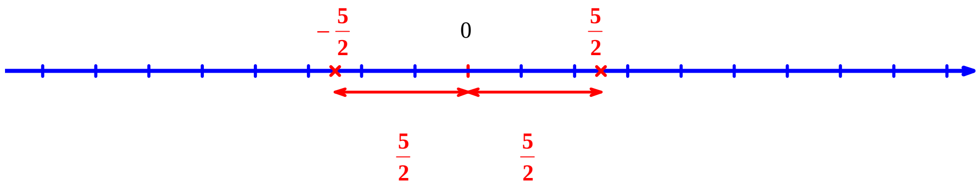
• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x|=\frac{5}{2}$ (1).**

(1) signifie que la distance entre 0 et x est égale à $\frac{5}{2}$.

$$\mathrm{d}(0\,;x)=\frac{5}{2}$$

On trace un axe représentant la droite réelle.
On place 0.

On trace deux flèches à partir de 0 représentant la longueur $\frac{5}{2}$.



L’ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \left\{ -\frac{5}{2} ; \frac{5}{2} \right\}$ (il n’y a pas d’ordre).

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l’équation $|\ x\ | = -1$ (2).**

L’équation (2) n’a pas de solution car le résultat d’une valeur absolue est toujours positif ou nul (en raccourci, on dit qu’une valeur absolue est toujours positive ou nulle).

L’ensemble des solutions de (2) est $S_2 = \varnothing$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l’équation $|\ x\ | = 0$ (3).**

(3) signifie que la distance entre 0 et x est égale à 0.

$$\mathrm{d}(0 ; x) = 0$$

L’ensemble des solutions de (3) est $S_3 = \{\ 0\ \}$.

Commentaires sur l’exercice :

• On peut désigner une égalité, une inégalité, une équation ou une inéquation par un numéro placé entre parenthèses à sa droite.

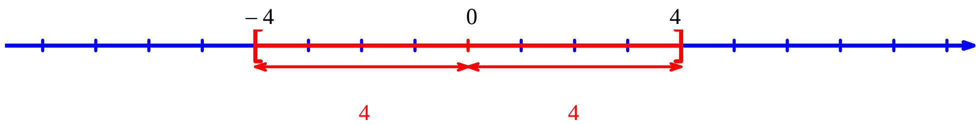
• Il est bien évident qu’on n’a pas besoin de tracer la droite graduée si l’on applique la règle du cours (si l’on utilise la règle du cours).

5 Résolutions d’inéquations avec des valeurs absolues

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l’inéquation $|\ x\ | \leqslant 4$ (1).**

(1) signifie que la distance entre 0 et x est inférieure ou égale à 4.

On trace un axe représentant la droite réelle.

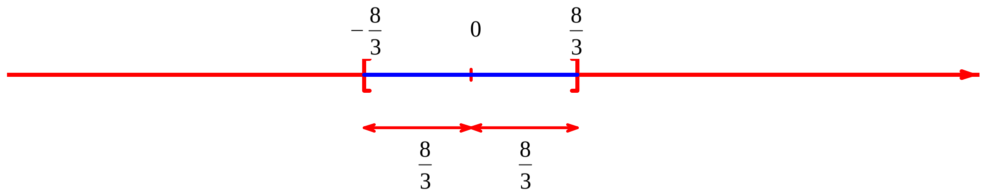


L’ensemble des solutions de (1) est $S_1 = [-4 ; 4]$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l’inéquation $|\ x\ | > \frac{8}{3}$ (2).**

(2) signifie que la distance entre 0 et x est strictement supérieure à $\frac{8}{3}$.

On trace un axe représentant la droite réelle.

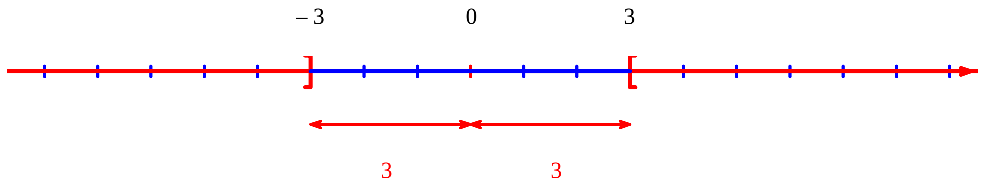


L’ensemble des solutions de (2) est $S_2 = \left]-\infty ; -\frac{8}{3}\right[\cup \left]\frac{8}{3} ; +\infty\right[$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l’inéquation $|\ x\ | \geqslant 3$ (3).**

(3) signifie que la distance entre 0 et x est supérieure ou égale à 3.

On trace un axe représentant la droite réelle.



L’ensemble des solutions de (3) est $S_3 =]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$.

6

$x>0$ quelconque

1°) **Rangeons dans l'ordre croissant les nombres : 1, $\dfrac{x}{x+1}$, $\dfrac{x+1}{x}$.**

> ***x* est quelconque.**
> **On ne peut donc pas prendre un exemple (sauf éventuellement lors de la recherche).**
> **Il faut faire la démonstration dans le cas général.**

$x>0$ donc $x+1>0$.

$\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{x+1}{x}$ sont donc deux quotients dont le numérateur et le dénominateur sont positifs.

Or $x<x+1$ donc $\dfrac{x}{x+1}<1$ et $\dfrac{x+1}{x}>1$ (cf. rappel de règle dans l'encadré ci-dessous)

Conclusion : $\dfrac{x}{x+1}<1<\dfrac{x+1}{x}$

> **Règle :**
>
> Pour un quotient dont le numérateur et le dénominateur sont positifs :
> - si le numérateur est strictement inférieur au dénominateur, alors ce quotient est strictement inférieur à 1 ;
> - si le numérateur est strictement supérieur au dénominateur, alors ce quotient est strictement supérieur à 1.

On peut aussi redémontrer la règle dans le cas qui nous intéresse ici.
On écrit $x<x+1$.
Donc :

- en divisant les deux membres par x ($x>0$), on obtient $1<\dfrac{x+1}{x}$.
- en divisant les deux membres par $x+1$ ($x+1>0$), on obtient $\dfrac{x}{x+1}<1$.

2°) **Déterminons lequel des réels $\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{x+1}{x}$ est le plus proche de 1.**

Pour répondre à la question, on calcule la distance entre $\dfrac{x}{x+1}$ et 1 puis entre $\dfrac{x+1}{x}$ et 1.
On ne peut répondre en prenant pour x une valeur particulière. On travaille en littéral.

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{x+1};1\right)=1-\frac{x}{x+1}=\frac{\cancel{x}+1\cancel{-x}}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$
$$\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{x};1\right)=\frac{x+1}{x}-1=\frac{\cancel{x}+1\cancel{-x}}{x}=\frac{1}{x}$$

Or $0<x<x+1$ donc comme la fonction « inverse » est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a

$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{x+1}$.

Par conséquent, $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{x+1};1\right)<\mathrm{d}\left(\dfrac{x+1}{x};1\right)$.

Le réel $\dfrac{x}{x+1}$ est donc plus proche de 1 que $\dfrac{x+1}{x}$.

Illustration graphique :

On peut tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions $f:x\mapsto\dfrac{x}{x+1}$ et $g:x\mapsto\dfrac{x+1}{x}$ (en utilisant la calculatrice ou, mieux, un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur).
On trace également la droite Δ d'équation $y=1$.

Prendre une fenêtre graphique adaptée ($\text{xmin}=-1$ par exemple puisque l'on veut observer les courbes sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$).

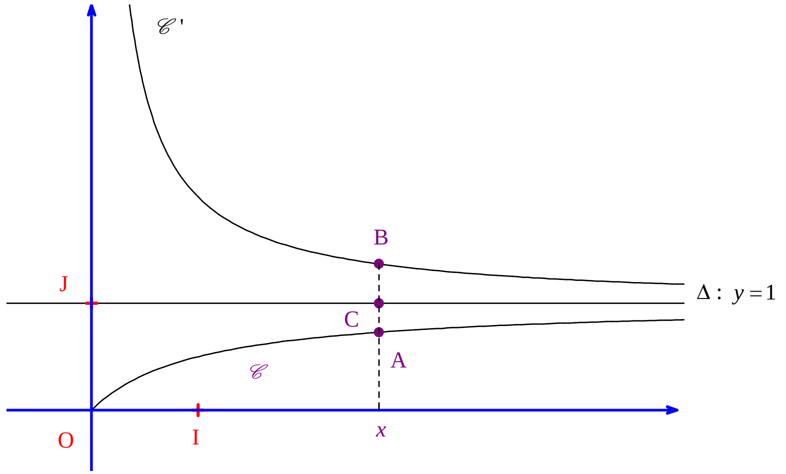
On observe alors la position relative des deux courbes et de la droite sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ uniquement (puisque $x>0$ par hypothèse) c'est-à-dire que l'on observe comment les courbes se positionnent les unes par rapport aux autres (au-dessus ou au-dessous).

Remarque : La droite d'équation $y=1$ joue un rôle particulier pour les deux courbes. En effet, chacune des deux courbes s'en rapproche indéfiniment sans jamais la toucher. On dit que la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à chacune des deux courbes en $+\infty$.

On peut alors visualiser l'inégalité $\dfrac{x}{x+1}<1<\dfrac{x+1}{x}$ établie à la question 1°) ainsi que la réponse à la question 2°)

Plus précisément, notons $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé.
Notons Δ la droite d'équation $y=1$.

Soit x un réel strictement positif quelconque.



On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x, B le point de $\mathscr{C}'$ d'abscisse x et C le point de Δ d'abscisse x.

On constate que, pour tout réel $x>0$, la distance AC est inférieure à la distance BC (cela serait plus facile avec une figure dynamique, en créant un curseur de manière à pouvoir faire « bouger » les points A, B, C).

Or la distance AC est égale à la distance entre le réel $\dfrac{x}{x+1}$ et 1 ; la distance BC est égale à la distance entre $\dfrac{x+1}{x}$ et 1.

Donc $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{x+1};1\right)<\mathrm{d}\left(\dfrac{x+1}{x};1\right)$.

Il est intéressant de voir les différentes cadres possibles pour traiter cet exercice :
- cadre algébrique (celui préconisé par l'énoncé) ;
- cadre géométrique-graphique avec les courbes de fonctions.

7

$\mathrm{A}=|\,x+2y\,|-|\,x-y\,|$

• Calcul de A pour $x=4$ et $y=-1$

$\mathrm{A}=|\,4+2\times(-1)\,|-|\,4-(-1)\,|$

$=|\,4-2\,|-|\,5\,|$ (ligne facultative)

$=|\,2\,|-|\,5\,|$

$=2-5$

$=-3$

• Calcul de A pour $x=\sqrt{5}$ et $y=2\sqrt{5}$

$\mathrm{A}=|\,\sqrt{5}+2\times2\sqrt{5}\,|-|\,\sqrt{5}-2\sqrt{5}\,|$

$=|\,5\sqrt{5}\,|-|\,-\sqrt{5}\,|$

$=5\sqrt{5}-\sqrt{5}$

$=4\sqrt{5}$

On calcule à l'intérieur des valeurs absolues.

8 Résolution d'inéquations avec valeurs absolues

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|\,x\,|\leqslant-2$ (1).

Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul donc (1) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1=\varnothing$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|\,x\,|>-1$ (2).

Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul donc (2) admet tous les réels pour solutions.
En effet, quel que soit le réel x, $|\,x\,|\geqslant0$ donc a fortiori, $|\,x\,|>-1$.
Cette propriété reste vraie si l'on remplace – 1 par n'importe quel réel négatif.

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=\mathbb{R}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|\,x\,|\leqslant0$ (3).

Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul donc (3) admet uniquement 0 pour solution.

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3=\{\,0\,\}$.

9 Résolution d'un système avec des valeurs absolues

Résolvons le système (I) $\begin{cases}3|\,x\,|-2|\,y\,|=-5\\5|\,x\,|+|\,y\,|=9\end{cases}$.

On pose $X=|\,x\,|$ et $Y=|\,y\,|$ (changement d'inconnues).

Le système (I) s'écrit alors (II) $\begin{cases}3X-2Y=-5\\5X+Y=9\end{cases}$.

Le système (II) est un système linéaire de deux équations à deux inconnues (on notera que le système I n'est pas un système linéaire à cause des valeurs absolues).
On calcule le déterminant (voir rappel de la définition à la fin du corrigé).

$\begin{vmatrix}3 & -2\\5 & 1\end{vmatrix}=3\times1-5\times(-2)=3+10=13\neq0$.

Le déterminant est non nul donc le système (II) admet un unique couple solution.
Pour trouver ce couple, on peut utiliser la méthode par combinaison ou par substitution.

Résolvons le système (II) par combinaisons linéaires.

Pour trouver X :

On garde la 1$^{\text{ère}}$ équation et on multiplie la 2$^{\text{e}}$ équation par 2 (pour éliminer les Y).

$\begin{cases}3X-2Y=-5\\10X+2Y=18\end{cases}$

On ajoute membre à membre les deux équations.
$13X = 13$
$X = 1$

Pour trouver Y :

On multiplie la 1ère équation par – 5 et la 2e équation par 3 (pour éliminer les X).

$$\begin{cases} -15X + 10Y = 25 \\ 15X + 3Y = 27 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre les deux équations.

$13Y = 52$
$Y = 4$

On peut aussi remplacer X par 1 dans la 1ère équation du système II ($3\times 1 - 2Y = -5$ soit $3 - 2Y = -5$, $-2Y = -8$ d'où $Y = 4$).

Méthode des multiplicateurs :

$$\begin{cases} 3X - 2Y = -5 \\ 5X + Y = 9 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times 1 \\ \times 2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \times(-5) \\ \times 3 \end{array} \right.$$

pour trouver X pour trouver Y

Pour trouver X, on multiplie la 1ère équation par 1 et on multiplie la 2e équation par 2 (pour éliminer les Y).
On additionne membre à membre.
Pour trouver X, on multiplie la 1ère équation par – 5 et la 2e équation par 3 (pour éliminer les X).
On additionne membre à membre.

On obtient ainsi le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} 13X = 13 \\ 13Y = 52 \end{cases}$$

La solution de (II) est le couple $(1\,;4)$.

On revient au système (I).

On sait que $X = |\,x\,|$ et $Y = |\,y\,|$.

Donc le système (I) est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} |\,x\,| = 1 \\ |\,y\,| = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1 \\ y = 4 \quad \text{ou} \quad y = -4 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (I) est donc $\boldsymbol{S = \{(1\,;4)\,;(1\,;-4)\,;(-1\,;4)\,;(-1\,;-4)\}}$.
Le système (I) admet 4 couples solutions.

• On peut résoudre le système (II) par substitution. Mieux vaut cependant s'habituer à résoudre les systèmes linéaires par combinaisons.

• On peut résoudre le système (I) à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

10 Résolutions d'équations avec valeurs absolues

Le but d'enlever les barres de valeur absolue.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\,x+5\,| = 1$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x + 5 = 1$ ou $x + 5 = -1$
$x = -4$ ou $x = -6$

L'ensemble des solutions de (1) est $\boldsymbol{S_1 = \{-4\,;-6\}}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\,3x-2\,| = 4$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

$3x - 2 = 4$ ou $3x - 2 = -4$
$3x = 6$ ou $3x = -2$
$x = 2$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$

L'ensemble des solutions de (2) est $\boldsymbol{S_2 = \left\{2\,;-\dfrac{2}{3}\right\}}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\,x+2\,| = -5$ (3)

Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul.
Donc l'ensemble des solutions de (3) est $\boldsymbol{S_3 = \varnothing}$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x^2-3|=1$ (4).**

(4) est successivement équivalente à :

$x^2-3=1$ ou $x^2-3=-1$

$x^2=4$ ou $x^2=2$

$x=2$ ou $x=-2$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

L'ensemble des solutions de (4) est $S_4=\left\{2\,;-2\,;\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\right\}$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|1-x|=\sqrt{2}$ (5).**

(5) est successivement équivalente à :

$1-x=\sqrt{2}$ ou $1-x=-\sqrt{2}$

$x=1-\sqrt{2}$ ou $x=1+\sqrt{2}$

L'ensemble des solutions de (5) est $S_5=\left\{1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\right\}$.

$\boxed{11}$ Résolutions d'inéquations avec valeurs absolues

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x+7|<9$ (1).**

(1) est successivement équivalente à :

$-9<x+7<9$

$-16<x<2$

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1=\left]-16\,;2\right[$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x-1|\geqslant 3$ (2).**

(2) est successivement équivalente à :

$2x-1\leqslant -3$ ou $2x-1\geqslant 3$ *

$2x\leqslant -2$ ou $2x\geqslant 4$

$x\leqslant -1$ ou $x\geqslant 2$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=\left]-\infty\,;-1\right]\cup\left[2\,;+\infty\right[$.

* **Explication complémentaire :**

$|\ldots|\geqslant 3$ signifie $\ldots\leqslant -3$ $\boxed{\text{ou}}$ $\ldots\geqslant 3$

En effet, $|\mathrm{X}|\geqslant 3$ signifie $\mathrm{d}(0\,;\mathrm{X})\geqslant 3$.

Image mentale associée :
Tout ce qui est avant -3
Tout ce qui est après 3.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|3x|\geqslant 2$ (3).**

(3) est successivement équivalente à :

$3x\leqslant -2$ ou $3x\geqslant 2$

$x\leqslant -\dfrac{2}{3}$ ou $x\geqslant \dfrac{2}{3}$

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3=\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x-1|<\dfrac{1}{2}$ (4).**

(4) est successivement équivalente à :

$-\dfrac{1}{2}<2x-1<\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}<2x<\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{3}{4}$

L'ensemble des solutions de (4) est $S_4=\left]\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{3}{4}\right[$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|1-4x|<-1$ (5).**

L'ensemble des solutions de (5) est $S_5=\varnothing$.

$\boxed{12}$ Résolutions de systèmes d'inéquations avec valeurs absolues

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système (I) $\begin{cases} |2x-3|\leqslant 1 & (1) \\ |x+1|>5 & (2) \end{cases}$.**

Méthode : on résout séparément (1) et (2).

On peut aussi garder « groupées » les 2 inéquations mais mieux vaut séparer la résolution car on n'est pas sûr que la résolution de chaque inéquation comporte le même nombre d'étapes.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1).

(1) est successivement équivalente à :

$-1 \leqslant 2x-3 \leqslant 1$
$2 \leqslant 2x \leqslant 4$
$1 \leqslant x \leqslant 2$

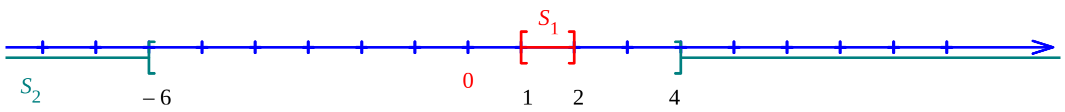
L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = [1\,;2]$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (2).

(2) est successivement équivalente à :
$x+1>5$ ou $x+1<-5$
$x>4$ ou $x<-6$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 =]-\infty\,;-6[\cup]4\,;+\infty[$.

On représente les ensembles S_1 et S_2 sur la droite réelle.



L'ensemble des solutions du système (I) est $\boldsymbol{S = S_1 \cap S_2 = \varnothing}$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système (II)** $\begin{cases} |x-2|<9 & \textbf{(1)} \\ |x+1| \geqslant 4 & \textbf{(2)} \end{cases}$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1).

(1) est successivement équivalente à :
$-9<x-2<9$
$-7<x<11$

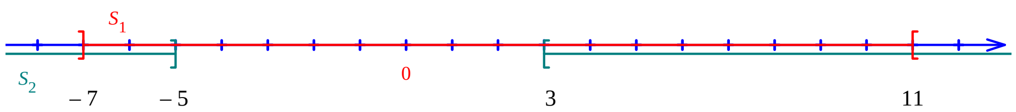
L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 =]-7\,;11[$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (2).

(2) est successivement équivalente à :
$x+1 \geqslant 4$ ou $x+1 \leqslant -4$
$x \geqslant 3$ ou $x \leqslant -5$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 =]-\infty\,;-5] \cup [3\,;+\infty[$.

L'ensemble des solutions du système (II) est $\boldsymbol{S = S_1 \cap S_2 =]-7\,;-5] \cup [3\,;11[}$.



• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système (III)** $\begin{cases} |x-1|<8 & \textbf{(1)} \\ |x-2| \geqslant 4 & \textbf{(2)} \end{cases}$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1).

(1) est successivement équivalente à :
$-8<x-1<8$
$-7<x<9$

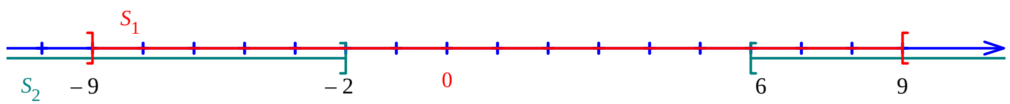
L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 =]-7\,;9[$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (2).

(2) est successivement équivalente à :
$x-2 \geqslant 4$ ou $x-2 \leqslant -4$
$x \geqslant 6$ ou $x \leqslant -2$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 =]-\infty\,;-2] \cup [6\,;+\infty[$.

L'ensemble des solutions du système (III) est $\boldsymbol{S = S_1 \cap S_2 =]-7\,;-2] \cup [6\,;9[}$.



$\boxed{13}$ Résolutions d'équations de la forme $|ax+b| = |cx+d|$ où a, b, c, d sont des réels

Méthode :

On applique la règle ci-dessous (condition nécessaire et suffisante pour que deux valeurs absolues soient égales) :

$$\boxed{|a| = |b| \text{ si et seulement si } a = b \text{ ou } a = -b}$$

Deux réels ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

On se sert de cette propriété pour les enlever les barres de valeur absolue.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathbf{|\,2x-1\,|=|\,x+4\,|}$ (1).**

(1) est successivement équivalente à :

$2x-1=x+4$ ou $2x-1=-(x+4)$ (il n'y a plus de barres de valeur absolue)
$x=5$ ou $2x-1=-x-4$
$x=5$ ou $3x=1-4$
$x=5$ ou $3x=-3$
$x=5$ ou $x=-1$

N.B. : On réécrit l'égalité $x=5$ sur autant de lignes qu'il le faut car il ne doit pas y avoir de « trou » (de « blanc ») ; chaque ligne doit pouvoir se lire indépendamment de la précédente.

L'ensemble des solutions de (1) est $\mathbf{S_1=\{-1\,;5\}}$.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathbf{|\,3-x\,|=|\,x\,|}$ (2).**

(2) est successivement équivalente à :

$3-x=x$ ou $3-x=-x$ (il n'y a plus de barres de valeur absolue)
$-2x=-3$ ou $\underbrace{0=3}_{\text{impossible}}$

$x=\dfrac{3}{2}$

L'ensemble des solutions de (2) est $\mathbf{S_2=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}}$.

Rappels sur les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b', c' sont des réels.

Un tel système est appelé un **système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.**

a, b, c, a', b', c' sont les **coefficients** du système.

Le couple (x, y) est appelé l'**inconnue** du système.

Le nombre $D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelé le **déterminant du système**.

- Lorsque $\boldsymbol{D \neq 0}$, le système admet alors un unique couple solution.
- Lorsque $\boldsymbol{D = 0}$, le système admet soit une infinité de couples solutions soit aucun couple solution.

Utilisation de la calculatrice TI-83 Premium CE