1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 7 juin 2016 (50 min)

Prénom : .... **Nom :** ....

Note : …. / 20

I. (10 points : 2 points pour chaque équation)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (1) ; $\sin^2 x=1$ (2) ; $\sin 2x=4\cos x$ (3) ; $\cos^2 x+\sin x+1=0$ (4) ; $\cos 5x=\cos x$ (5).

On demande de détailler uniquement la résolution des équations (1) et (3).

II. (4 points)

Déterminer l'ensemble des solutions S dans l'intervalle $[0\,;4\pi]$ de l'équation $2\sin^2 x-\sin x-1=0$ (E).

III. (3 points)

On considère la suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 33$ et sa raison $q = 0,9$.

On souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, quel est le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n < 0,1$.

Compléter la partie « Traitement » de l'algorithme ci-dessous. On précise que la variable *n* est un entier naturel et que la variable *u* est un réel.

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque …………………… **Faire**

u prend la valeur …………………..

n prend la valeur …………………..

FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Un rectangle $4 \times n$ (avec *n* entier strictement positif) est divisé en 4*n* carrés unités. Chaque carré est colorié en blanc ou en gris.

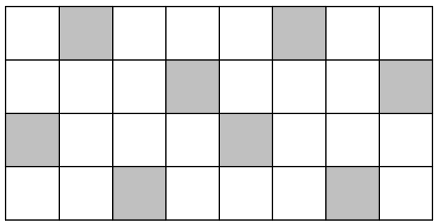
On considère les phrases suivantes :

P : « chaque carré unité blanc partage un côté avec au moins un carré unité gris » ;

Q : « il y a au moins *n* carrés unités rouges ».

1°) On admet que la proposition conditionnelle « Si *P*, alors *Q* » est vraie dans l'ensemble *E* des rectangles 4 × *n*.

Une illustration est donnée sur la figure ci-dessous dans le cas $n = 8$.



Faire deux phrases établissant un lien entre les phrases *P* et *Q*, l'une utilisant l'expression « condition nécessaire », l'autre utilisant l'expression « condition suffisante ».

……

……

……

……

……

……

……

2°) La proposition conditionnelle « Si *Q*, alors *P* » dans l'ensemble *E* est-elle vraie ou fausse ?
Répondre sans justifier.

…………….. (une seule réponse sans faire de phrase)

Corrigé du contrôle du 7-6-2016

Ce contrôle a été fait la veille du dernier cours de mathématiques et la veille de la journée de départ des terminales, après l'arrêt des notes. Aussi a-t-il été fait par groupes à titre d'entraînement (« contrôle blanc »).

I.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (1) ; $\sin^2 x=1$ (2) ; $\sin 2x=4\cos x$ (3) ; $\cos^2 x+\sin x+1=0$ (4) ; $\cos 5x=\cos x$ (5).

On demande de détailler uniquement la résolution des équations (1) et (3).

● Résolution de l'équation (1)

Il n'est pas judicieux du tout d'employer la formule d'addition pour « développer » $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ (piste envisagée par plusieurs élèves).

$(1) \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

(on « enlève » les cos avec la règle 1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Il y a deux « familles » de solutions.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$\boxed{S_1=\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

● Résolution de l'équation (2)

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=1 \\ \text{ou} \\ \sin x=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) & \text{(équation trigonométrique particulière)} \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) & \text{(équation trigonométrique particulière)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Il y a deux « familles » de solutions (avant-dernière équivalence).
On peut les réunir en une seule comme le montre la dernière équivalence (réfléchir un peu).

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$\boxed{S_2=\left\{\frac{\pi}{2}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

• Résolution de l'équation (3)

$(3) \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = 4\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x(\sin x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ \sin x = 2 \text{ (impossible)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$$\boxed{\boldsymbol{S_3 = \left\{\frac{\pi}{2} + k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}}$$

Beaucoup trop d'élèves ont simplifié les deux membres de l'équation par $\cos x$ et ont obtenu l'équation $\sin x = 2$.
La méthode est fausse. Il faut tout passer dans le premier membre et factoriser.

• Résolution de l'équation (4)

$(4) \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \quad (4')$

On pose $X = \sin x$.

L'équation $(4')$ s'écrit $-X^2 + X + 2 = 0 \quad (4'')$.
Les racines de $(4'')$ sont -1 et 2.

$(4') \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \quad (a) \\ \text{ou} \\ \sin x = 2 \quad (b) \end{cases}$

On résout séparément les équations (a) et (b).

$(a) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

L'équation (b) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Soit S_4 l'ensemble des solutions de (4).

$$\boxed{\boldsymbol{S_4 = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}}$$

• Résolution de l'équation (5)

$(5) \Leftrightarrow \cos 5x = \cos x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 5x = -x + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ (on « enlève » les cos avec la règle 1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 6x = 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \frac{k'\pi}{3} \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Il y a deux « familles » de solutions.

Soit S_5 l'ensemble des solutions de (5).

$$\boxed{\boldsymbol{S_5 = \left\{\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{k'\pi}{3},\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}}$$

II.

Déterminer l'ensemble des solutions S dans l'intervalle $[0\,;4\pi]$ de l'équation $2\sin^2 x-\sin x-1=0 \quad (\mathrm{E})$.

On pose $X=\sin x$.

L'équation (E) s'écrit $2X^2-X-1=0 \quad (5')$.

Les racines de (E) sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$.

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \sin x=-\dfrac{1}{2} & (a) \\ \text{ou} & \\ \sin x=1 & (b) \end{array}\right.$$

On résout séparément les équations (a) et (b).

$$(a) \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(a) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi & (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+2k'\pi & (k'\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

$$(b) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Soit S l'ensemble des solutions de (E) dans l'intervalle $[0\,;4\pi]$.

$$S=\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6},\frac{19\pi}{6},\frac{23\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right\}$$

III.

On considère la suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=33$ et sa raison $q=0,9$.

On souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, quel est le plus petit entier naturel n tel que $u_n<0,1$.

Compléter la partie « Traitement » de l'algorithme ci-dessous. On précise que la variable n est un entier naturel et que la variable u est un réel.

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $u\geqslant 0,1$ **Faire**

    u prend la valeur $0,9u$

    n prend la valeur $n+1$

FinTantque

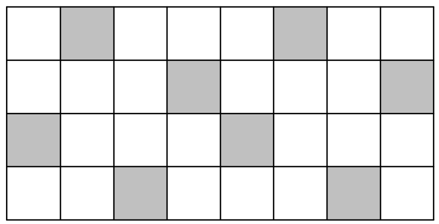
Sortie :
Afficher n

IV.

Un rectangle $4\times n$ (avec n entier strictement positif) est divisé en $4n$ carrés unités. Chaque carré est colorié en blanc ou en gris.
On considère les phrases suivantes :
P : « chaque carré unité blanc partage un côté avec au moins un carré unité gris » ;
Q : « il y a au moins n carrés unités rouges ».

1°) On admet que la proposition conditionnelle « Si P, alors Q » est vraie dans l'ensemble E des rectangles $4\times n$.

Une illustration est donnée sur la figure ci-dessous dans le cas $n=8$.



Faire deux phrases établissant un lien entre les phrases P et Q, l'une utilisant l'expression « condition nécessaire », l'autre utilisant l'expression « condition suffisante ».

P est une condition suffisante de Q.

Q est une condition nécessaire de P (ou condition nécessaire à P).

Pour avoir P, il faut avoir Q.

Pour avoir Q, il suffit d'avoir P.

2°) La proposition conditionnelle « Si Q, alors P » dans l'ensemble E est-elle vraie ou fausse ?
Répondre sans justifier.

Faux (une seule réponse sans faire de phrase)