TS1

Contrôle du lundi 6 juin 2016 (50 min)

Prénom : …… **Nom :** ……

Note : …. / 20

I.

Soit ABCDEFGH un cube un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[EF]$ et J le centre de la face ADHE.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1°) Démontrer que (BJ) est orthogonale à (AIG).

2°) Déterminer une équation cartésienne du plan (AIG).

3°) Calculer la distance du point B au plan (AIG).

II.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

À tout réel m on fait correspondre le plan P_m d'équation cartésienne $m^2x + 4(m-1)y + 2mz - 12 = 0$.

1°) Pour quelle(s) valeur(s) de m le point $A(1,1,1)$ appartient-il à P_m ?

2°) Démontrer que les plans P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

3°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D d'intersection des plans P_1 et P_{-4}.

4°) Démontrer que la droite D et le plan P_0 se coupent en un point K. Déterminer les coordonnées de K.

5°) Démontrer que pour tout réel m le point K appartient au plan P_m.

6°) Démontrer que K est l'unique point de l'espace qui appartient à P_m pour tout réel m.

III.

Un organisme souhaite connaître la proportion possédant un caractère C dans une population donnée $\mathcal{P}$. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage. Mais l'organisme craint que les individus interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, il propose le protocole suivant :

> On choisit aléatoirement un échantillon de la population $\mathcal{P}$.
>
> Pour chaque individu de cet échantillon :
> • l'individu lance un dé cubique équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
> • l'enquêteur pose la question : « Possédez-vous le caractère C ? ».
>
> ▪ Si le résultat du lancer est pair alors l'individu doit répondre à la question par « oui » ou « non » de façon sincère.
> ▪ Si le résultat du lancer est « 1 » alors l'individu doit répondre « oui ».
> ▪ Si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors l'individu doit répondre « non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères. On note p la proportion inconnue d'individus de la population $\mathcal{P}$ qui possèdent le caractère C.

1°) On choisit aléatoirement un individu faisant parti du protocole.
Exprimer en fonction de p la probabilité q qu'il ait répondu « oui » à la question posée.

2°) À la demande de l'organisme, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole. Sur un échantillon de taille 1500, il dénombre 625 réponses « oui ».

a) Donner l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q d'individus qui répondent « oui » à un tel sondage, parmi la population $\mathcal{P}$. On donnera les bornes en valeurs exactes.

b) En déduire l'intervalle de confiance de la proportion p, au niveau de confiance de 95 %, d'individus qui possèdent le caractère C.

Corrigé du contrôle du 6-6-2016

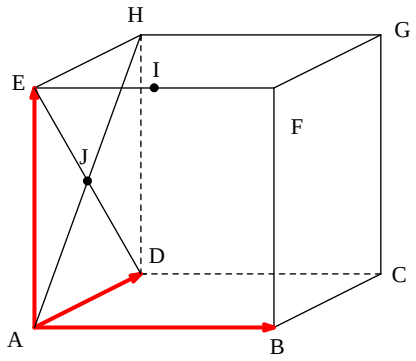
Ce contrôle n'a pas été noté. Il a été donné à titre d'entraînement comme « contrôle blanc ».

I.

Soit ABCDEFGH un cube un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[EF]$ et J le centre de la face ADHE.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Commencer par faire une figure assez grande.



1°) Démontrer que (BJ) est orthogonale à (AIG).

$A\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$ $\quad I\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{vmatrix}$ $\quad G\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ $\quad B\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ $\quad J\begin{vmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{vmatrix}$

$\overrightarrow{AI}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{vmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BJ}\begin{vmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{vmatrix}$ $\quad \overrightarrow{IG}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{vmatrix}$

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\times(-1)+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=0$ donc $\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{BJ}$ d'où $(AI)\perp(BJ)$.

$\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{IG}=-1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1+0\times\frac{1}{2}=0$ donc $\overrightarrow{BJ}\perp\overrightarrow{IG}$ d'où $(BJ)\perp(IG)$.

Or (AI) et (IG) sont deux droites sécantes du plan (AIG).

Par suite, $(BJ)\perp(AIG)$.

2°) Déterminer une équation cartésienne du plan (AIG).

D'après la question précédente, $(BJ)\perp(AIG)$ donc le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ est un vecteur normal au plan (AIG).

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned}M\in(AIG) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BJ}=0\\ &\Leftrightarrow x\times(-1)+y\times\frac{1}{2}+z\times\frac{1}{2}=0\\ &\Leftrightarrow -2x+y+z=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AIG) s'écrit $-2x+y+z=0$.

3°) Calculer la distance du point B au plan (AIG).

On applique la formule du cours.

$$\begin{aligned}d(B,(AIG)) &= \frac{\left|-2\times1+0\times1+0\times1\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

On peut aussi écrire $d(B,(AIG))=\sqrt{\frac{2}{3}}$ ce que l'on obtient d'ailleurs directement avec l'équation cartésienne de (AIG) sous la forme $-x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0$.

II.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

À tout réel m on fait correspondre le plan P_m d'équation cartésienne $m^2x+4(m-1)y+2mz-12=0$.

1°) Pour quelle(s) valeur(s) de m le point $\mathrm{A}(1,1,1)$ appartient-il à P_m ?

$$\begin{aligned}\mathrm{A} \in P_m &\Leftrightarrow m^2\times 1+(4m-4)\times 1+2m\times 1-12=0\\ &\Leftrightarrow m^2+6m-16=0\\ &\Leftrightarrow m=2 \quad \text{ou} \quad m=-8\end{aligned}$$

2°) Démontrer que les plans P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

Un équation cartésienne de P_1 s'écrit $x+2z-12=0$ donc le vecteur $\vec{u}\left|\begin{matrix}1\\0\\2\end{matrix}\right.$ est un vecteur normal à P_1.

Une équation cartésienne de P_{-4} s'écrit $16x-20y-8z-12=0$ soit $4x-5y-2z-3=0$ donc le vecteur $\vec{v}\left|\begin{matrix}4\\-5\\-2\end{matrix}\right.$ est un vecteur normal à P_{-4}.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=1\times 4-2\times 2=0$

Donc $\vec{u}\perp\vec{v}$ et par suite, $P_1\perp P_{-4}$.

3°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D d'intersection des plans P_1 et P_{-4}.

On résout le système $(\mathrm{I})\ \begin{cases}x+2z-12=0\\4x-5y-2z-3=0\end{cases}$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) &\Leftrightarrow \begin{cases}x=12-2z\\4x-5y=2z+3\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=12-2z\\4(12-2z)-5y=2z+3\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=12-2z\\-5y=10z-45\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=12-2z\\y=-2z+9\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=12-2z\\y=-2z+9\end{cases}\end{aligned}$$

Un système d'équations paramétriques de D s'écrit donc $\begin{cases}x=12-2\lambda\\y=9-2\lambda\\z=\lambda\end{cases}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

4°) Démontrer que la droite D et le plan P_0 se coupent en un point K. Déterminer les coordonnées de K.

Une équation de P_0 s'écrit $-4y-12=0$ soit $y=-3$.

Un vecteur normal à P_0 est donc $\vec{j}$.

Un vecteur directeur de D est le vecteur $\vec{w}\left|\begin{matrix}-2\\-2\\1\end{matrix}\right.$.

$\vec{j}\bullet\vec{w}=0\times(-2)+1\times(-2)+0\times 1=-2$

Donc $\vec{j}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

Par conséquent, la droite D n'est pas parallèle au plan P_0.

$\mathrm{K}\in P_0$ donc $-4y_{\mathrm{K}}-12=0$ d'où $y_{\mathrm{K}}=-3$.

$\mathrm{K}\in D$

Le paramètre λ de K vérifie donc $y_{\mathrm{K}}=9-2\lambda$ soit $-3=9-2\lambda$ d'où $\lambda=6$.

$x_{\mathrm{K}}=12-2\lambda=0$ et $z_{\mathrm{K}}=\lambda=6$

Donc K a pour coordonnées $(0,-3,6)$.

5°) Démontrer que pour tout réel m le point K appartient au plan P_m.

$$\begin{aligned}m^2x_{\mathrm{K}}+4(m-1)y_{\mathrm{K}}+2mz_{\mathrm{K}}-12 &= m^2\times 0+4(m-1)\times(-3)+2m\times 6-12\\ &=-12(m-1)+12m-12\\ &=0\end{aligned}$$

Donc K appartient au plan P_m pour tout réel m.

6°) Démontrer que K est l'unique point de l'espace qui appartient à P_m pour tout réel m.

Si un point appartient à tous les plans P_m, alors nécessairement il appartient à P_1, P_{-4} et P_0.
Autrement dit, il appartient à D et P_0. On en déduit que ce point ne peut être que le point K.

D'après la question 5°), on en déduit que K est l'unique point de l'espace qui appartient à P_m pour tout réel m.

III.

Un organisme souhaite connaître la proportion possédant un caractère C dans une population donnée $\boldsymbol{P}$. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage. Mais l'organisme craint que les individus interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, il propose le protocole suivant :

> On choisit aléatoirement un échantillon de la population $\boldsymbol{P}$.
>
> Pour chaque individu de cet échantillon :
> • l'individu lance un dé cubique équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
> • l'enquêteur pose la question : « Possédez-vous le caractère C ? ».
>
> ▪ Si le résultat du lancer est pair alors l'individu doit répondre à la question par « oui » ou « non » de façon sincère.
> ▪ Si le résultat du lancer est « 1 » alors l'individu doit répondre « oui ».
> ▪ Si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors l'individu doit répondre « non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères. On note p la proportion inconnue d'individus de la population $\boldsymbol{P}$ qui possèdent le caractère C.

1°) On choisit aléatoirement un individu faisant parti du protocole.
Exprimer en fonction de p la probabilité q qu'il ait répondu « oui » à la question posée.

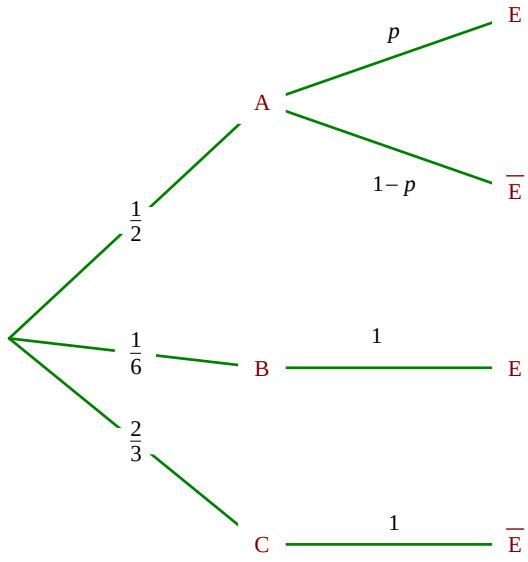
On considère les événements suivants :
A : « obtenir le numéro pair au lancer de dé » ;
B : « obtenir le numéro 1 au lancer du dé » ;
C : « obtenir le numéro 3 ou le numéro 5 au lancer du dé » ;
E : « répondre oui à la question ».

A, B, C constituent un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{E}/\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})\times P(\mathrm{E}/\mathrm{B}) + P(\mathrm{C})\times P(\mathrm{E}/\mathrm{C})$$

$$= \frac{1}{2}\times p + \frac{1}{6}\times 1$$

$$= \frac{p}{2} + \frac{1}{6}$$



2°) À la demande de l'organisme, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole. Sur un échantillon de taille 1500, il dénombre 625 réponses « oui ».

a) Donner l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q d'individus qui répondent « oui » à un tel sondage, parmi la population $\boldsymbol{P}$. On donnera les bornes en valeurs exactes.

L'intervalle de l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q d'individus qui répondent « oui » à un tel sondage, parmi la population $\boldsymbol{P}$ est $\left[\frac{625}{1500} - \frac{1}{\sqrt{1500}} ; \frac{625}{1500} + \frac{1}{\sqrt{1500}}\right]$.

b) En déduire un intervalle de confiance de la proportion p, au niveau de confiance de 95 %, d'individus qui possèdent le caractère C.

On considère l'encadrement $\frac{625}{1500} - \frac{1}{\sqrt{1500}} \leqslant \frac{p}{2} + \frac{1}{6} \leqslant \frac{625}{1500} + \frac{1}{\sqrt{1500}}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{625}{1500} - \frac{1}{\sqrt{1500}} - \frac{1}{6}\right) \leqslant p \leqslant 2\left(\frac{625}{1500} + \frac{1}{\sqrt{1500}} - \frac{1}{6}\right)$$

Avec la calculatrice, on trouve $2\left(\frac{625}{1500} - \frac{1}{\sqrt{1500}} - \frac{1}{6}\right) = 0,448360222...$ et $2\left(\frac{625}{1500} + \frac{1}{\sqrt{1500}} - \frac{1}{6}\right) = 0,551639777...$.

On peut donc prendre comme intervalle de confiance de p : $[0,448 ; 0,552]$.