1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 1$^{\text{er}}$ juin 2016 (50 min)

Prénom : ………………………………… **Nom :** …………………………………

Note : …. / 20

I. (2 points)

Soit x un réel quelconque.

Exprimer $\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

II. (4 points : 2 points + 2 points)

Soit α un réel tel que $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Calculer $\cos 2\alpha$ et $\cos 4\alpha$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

III. (6 points : 1°) 3 point ; 2°) 3 points)

1°) Démontrer que pour tout couple $(x,\,y)$ de réels on a : $\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2°) On pose $\mathrm{A}=\cos(a+b)\cos(a-b)+\cos(b+c)\cos(b-c)+\cos(c+a)\cos(c-a)$ où a, b, c sont des réels quelconques. À l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que $\mathrm{A}=\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

IV. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 4x(1-x)$.

1°) Démontrer que pour tout réel θ on a $f\left(\sin^2\theta\right) = \sin^2(2\theta)$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) Donner une expression très simple de $f\left[f\left(\sin^2\theta\right)\right]$ en fonction de θ.

……

……

……

……

……

……

……

V. (4 points)

On considère l'algorithme ci-dessous qui fait intervenir les variables a et u (réels) ainsi que la variable n (entier naturel).

Entrée :
Saisir a

Initialisations :
n prend la valeur 0
u prend la valeur 64

Traitement :
Tantque $u \leqslant a$ **Faire**
    u prend la valeur $2u$
    n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

Pour la valeur $a = 2016$ saisie en entrée, recopier dans l'espace ci-dessous et compléter autant que nécessaire le tableau suivant :

Étape	0	1	…………..	
Condition $u \leqslant a$		vraie	…………..	
Valeur de n	0		…………..	
Valeur de u	64		…………..	

Aucune explication n'est demandée.

En déduire l'affichage obtenu en sortie quand la valeur a saisie en entrée est 2016.

Corrigé du contrôle du 1er juin 2016

I.

Soit x un réel quelconque.

Exprimer $\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

$$\begin{aligned}\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)&=\cos x\times\cos\frac{2\pi}{3}+\sin x\times\sin\frac{2\pi}{3}\\&=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)&=\sin x\times\cos\frac{2\pi}{3}-\cos x\times\sin\frac{2\pi}{3}\\&=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\end{aligned}$$

On peut aussi écrire les résultats sous la forme $\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{-\cos x+\sqrt{3}\sin x}{2}$ et $\sin\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{-\sin x-\sqrt{3}\cos x}{2}$.

II.

Soit α un réel tel que $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Calculer $\cos 2\alpha$ et $\cos 4\alpha$.

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha&=2\cos^2\alpha-1\\&=2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1\\&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha&=\cos(2\times 2\alpha)\\&=2\cos^2 2\alpha-1\\&=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1\\&=-\frac{7}{9}\end{aligned}$$

III.

1°) Démontrer que pour tout couple $(x,\ y)$ de réels on a : $\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y$.

$$\begin{aligned}\cos(x+y)\cos(x-y)&=(\cos x\times\cos y-\sin x\times\sin y)\times(\cos x\times\cos y+\sin x\times\sin y)\\&=(\cos x\times\cos y)^2-(\sin x\times\sin y)^2\\&=\cos^2 x\times\cos^2 y-\sin^2 x\times\sin^2 y\\&=\cos^2 x\times(1-\sin^2 y)-(1-\cos^2 x)\times\sin^2 y\\&=\cos^2 x\cancel{-\cos^2 x\times\sin^2 y}-\sin^2 y\cancel{+\cos^2 x\times\sin^2 y}\\&=\cos^2 x-\sin^2 y\end{aligned}$$

2°) On pose $A=\cos(a+b)\cos(a-b)+\cos(b+c)\cos(b-c)+\cos(c+a)\cos(c-a)$ où a, b, c sont des réels quelconques. À l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que $A=\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c$.

$$\begin{aligned}A&=\cos(a+b)\cos(a-b)+\cos(b+c)\cos(b-c)+\cos(c+a)\cos(c-a)\\&=\cos^2 a-\sin^2 b+\cos^2 b-\sin^2 c+\cos^2 c-\sin^2 a\\&=\cos^2 a-\sin^2 a+\cos^2 b-\sin^2 b+\cos^2 c-\sin^2 c\\&=\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c\end{aligned}$$

IV.

On considère la fonction $f : x\mapsto 4x(1-x)$.

Cet exercice a été considéré comme difficile par les élèves.

1°) Démontrer que pour tout réel θ on a $f\left(\sin^2\theta\right)=\sin^2(2\theta)$.

$$\begin{aligned}f\left(\sin^2\theta\right)&=4\sin^2\theta\times\left(1-\sin^2\theta\right)\\&=4\sin^2\theta\times\cos^2\theta\\&=(2\sin\theta\cos\theta)^2\\&=(\sin 2\theta)^2\\&=\sin^2 2\theta\end{aligned}$$

2°) Donner une expression très simple de $f\left[f\left(\sin^2\theta\right)\right]$ en fonction de θ.

$$\begin{aligned}f\left[f\left(\sin^2\theta\right)\right]&=f\left(\sin^2 2\theta\right)\\&=\sin^2(2\times 2\theta)\\&=\sin^2(4\theta)\end{aligned}$$

(on applique le résultat du 1°) en posant $\theta'=2\theta$ ce qui évite de refaire des calculs).

V.

On considère l'algorithme ci-dessous qui fait intervenir les variables a et u (réels) ainsi que la variable n (entier naturel).

```
Entrée :
Saisir a

Initialisations :
n prend la valeur 0
u prend la valeur 64

Traitement :
Tantque u ⩽ a Faire
    | u prend la valeur 2u
    | n prend la valeur n+1
FinTantque

Sortie :
Afficher n
```

Pour la valeur $a = 2016$ saisie en entrée, recopier dans l'espace ci-dessous et compléter autant que nécessaire le tableau suivant :

Étape	0	1	…………..	
Condition $u \leqslant a$		vraie	…………..	
Valeur de n	0		…………..	
Valeur de u	64		…………..	

Aucune explication n'est demandée.

En déduire l'affichage obtenu en sortie quand la valeur a saisie en entrée est 2016.

Étape	0	1	2	3	4	5	6
Condition $u \leqslant a$		vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	faux
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	
Valeur de u	64	128	256	512	1024	2048	

On obtient 5 pour affichage à la fin de l'algorithme.

On peut aussi programmer l'algorithme sur la calculatrice pour vérifier que le résultat affiché à la fin de l'algorithme est bien 5.