Les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

I. Généralités

1°) Définition

On appelle une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants une équation différentielle de la forme $ay''+by'+cy=0$ où a, b, c sont des réels fixés tels que $a\neq 0$.

2°) Exemple

$y''+3y'+2y=0$

3°) Résolution

Résoudre l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ c'est déterminer toutes les fonctions *f* définies et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R}\quad af''(x)+bf'(x)+cf(x)=0$.

II. Ensemble des solutions

1°) Théorème fondamental

On considère une équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ (E) où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$.
On appelle « équation caractéristique » l'équation $ar^2+br+c=0$ (1) d'inconnue $r\in\mathbb{C}eeee$.
Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels d'inconnue complexe.
On pose $\Delta=b^2-4ac$ (discriminant de (1)).

1^er^ cas : $\Delta>0$

Dans ce cas, (1) admet 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2.
Les solutions de (E) sont les fonctions $\boxed{t\mapsto \lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t}}$ avec $(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

2^e^ cas : $\Delta=0$

Dans ce cas, (1) admet 1 racine double réelle $r=-\dfrac{b}{2a}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $\boxed{t\mapsto(\lambda t+\mu)e^{rt}}$ avec $(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

3^e^ cas : $\Delta<0$

Dans ce cas, (1) admet 2 racines complexes conjuguées distinctes r_1 et r_2.
On écrit $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$ avec $(\alpha\,;\beta)\in\mathbb{R}^2$
Les solutions de (E) sont les fonctions $\boxed{t\mapsto e^{\alpha t}\left(\lambda\cos(\beta t)+\mu\sin(\beta t)\right)}$ avec $(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Remarques :

- Si on intervertit r_1 et r_2, cela n'a aucune influence sur le résultat.

- Dans chaque cas, on obtient une famille de solution dépendant de deux paramètres λ et μ.

III. Exemples de résolution

1°) Exemple 1

Résolvons l'équation différentielle $y''+3y'+2y=0\quad(\mathrm{E})$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique associée s'écrit $r^2+3r+2=0\quad(1)$ avec $r\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\Delta&=3^2-4\times1\times2\\&=9-8\\&=1\end{aligned}$$

$\Delta>0$ donc (1) admet 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2 :

$$r_1=\frac{-3+\sqrt{1}}{2\times1}=-1$$
$$r_2=\frac{-3-\sqrt{1}}{2\times1}=-2$$

Les solutions de (E) sont les fonctions $t\mapsto\lambda e^{-t}+\mu e^{-2t}$ avec $(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

On ne cherche pas à déterminer λ et μ.

2°) Exemple 2

Résolvons l'équation différentielle $y''-2y'+y=0\quad(\mathrm{E})$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique associée s'écrit $r^2-2r+1=0\quad(1)$ avec $r\in\mathbb{C}$.

(1) admet une racine double réelle : $r_0=1$ (car $r^2-2r+1=(r-1)^2$).

Les solutions de (E) sont les fonctions $t\mapsto(\lambda t+\mu)e^{t}$ avec $(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

3°) Exemple 3

Résolvons l'équation différentielle $y''-2y'+2y=0 \quad (\mathrm{E})$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

L'équation caractéristique associée s'écrit $r^2-2r+2=0 \quad (1)$ avec $r\in\mathbb{C}$.

$\Delta=-1$

$\Delta<0$ donc (1) admet deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2 :

$r_1=1+\mathrm{i}$
$r_2=1-\mathrm{i}$

Les solutions de (E) sont les fonctions $t\mapsto \mathrm{e}^t(\lambda\cos t+\mu\sin t)$ avec $(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

IV. Cas particulier (à savoir) : équations différentielles de la forme $y''+\omega^2 y=0$ où ω est un réel non nul

1°) Propriété

On considère une équation différentielle de la forme $y''+\omega^2 y=0 \quad (\mathrm{E})$ où ω est un réel non nul.
L'équation caractéristique associée s'écrit $r^2+\omega^2=0 \quad (1)$ avec $r\in\mathbb{C}$.
Les solutions complexes de (1) sont donc $\mathrm{i}\omega$ et $-\mathrm{i}\omega$.
On en déduit la propriété :

> Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y''+\omega^2 y=0$ où ω est un réel non nul sont les fonctions $t\mapsto\lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)$ avec $(\lambda\,;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Il n'y a pas de « partie exponentielle » puisque les solutions de l'équation caractéristique associée ont une partie réelle nulle.

2°) Rappel sur les expressions de la forme $a\cos x+b\sin x$ où a et b sont deux réels

● Propriété :

> Il est possible de mettre une expression de la forme $a\cos x+b\sin x$ sous la forme $\mathrm{A}\cos(x-\alpha)$ où A est un réel positif et α sont deux réels.

● Démonstration :

Nous allons supposer que a et b ne sont pas tous les deux nuls (le cas où a et b sont tous les deux nuls est évident).

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

On vérifie sans peine que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$.

Donc il existe un réel α tel que $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Donc $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha)$.

Posons $\mathrm{A}=\sqrt{a^2+b^2}$.

On peut donc écrire $a\cos x+b\sin x=\mathrm{A}\cos(x-\alpha)$.

● Exemple :

Nous allons transformer l'expression $f(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x \quad (x\in\mathbb{R})$.

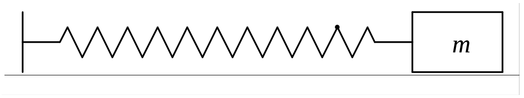
$$\begin{aligned} f(x)&=2\left(\cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin x\times\frac{1}{2}\right)\\ &=2\left(\cos x\times\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\times\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

3°) Application aux solutions

> Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y''+\omega^2 y=0$ (ω étant un réel non nul) sont les fonctions $t\mapsto\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi)$ où A est un réel strictement positif et φ est un réel.

La fonction $t\mapsto\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi)$ est une fonction périodique de période $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$.

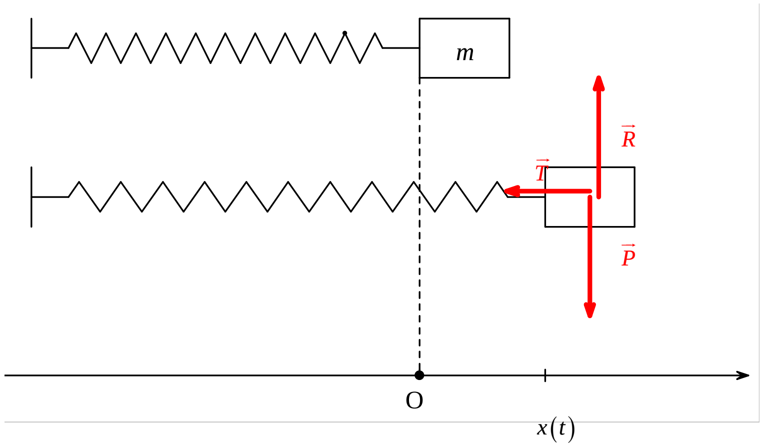
V. Utilisation en physique : oscillations libres d'un objet accroché à un ressort



Un objet de masse $m > 0$ (en kg), posé sur un plan horizontal, est accroché à un ressort de constante de raideur $k > 0$ (en $\mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$).

On écarte le ressort de sa position au repos puis on lâche.

On souhaite étudier l'évolution du système formé par l'objet et le ressort en l'absence de frottement sur le sol.



Les forces qui s'exercent sur l'objet sont le poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ du support et la tension $\vec{T}$ du ressort.

D'après la relation fondamentale de la dynamique, on a : $\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m\vec{a}$ où $\vec{a}$ désigne l'accélération.

On considère un axe horizontal Δ de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}\right)$ de telle sorte que :

- l'origine O est confondue avec l'extrémité du ressort au repos ;
- le vecteur $\vec{i}$ non représenté sur le schéma a pour norme 1 m qui donne le sens positif comme l'indique le schéma du dispositif ci-dessus.

On note $x(t)$ l'abscisse de l'extrémité du ressort dans ce repère à l'instant *t*.

On sait que l'intensité de la force de tension du ressort est proportionnelle à l'élongation. Plus précisément, on a : $T = k|x|$.

On peut écrire $\vec{T} = kx\,\vec{i}$.

L'accélération est donnée par $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i}$.

Comme d'ordinaire en mécanique, on utilise ici la notation de dérivée de Newton avec un point : $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\ddot{x} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$.

On projette la relation vectorielle sur l'axe Δ.

On obtient alors $-T = m\ddot{x}$ soit $-kx = m\ddot{x}$ ou encore $m\ddot{x} + kx = 0$.

On pose $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Ce nombre est appelé la *pulsation propre* du système.

L'équation différentielle s'écrit $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

D'après les résultats énoncés dans le paragraphe **IV**, $x(t) = \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$ où λ et μ sont des réels.

Il s'agit de *l'équation horaire du mouvement.*

On a également : $x(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi)$.

On parle de *mouvement oscillant.*

On peut déterminer λ et μ grâce aux conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$.

Exercices

$\boxed{1}$ 1°) Résoudre l'équation différentielle $y''+9y=0$ (E).

2°) Déterminer la solution f de (E) qui satisfait les conditions $f(0)=1$ et $f'(\pi)=-2$.

Solution :

1°) On reconnaît une équation différentielle de la forme $y''+\omega^2 y=0$ (E) où ω est un réel non nul.

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto k_1\cos 3x+k_2\sin 3x$ avec $(k_1\,;k_2)\in\mathbb{R}^2$.

2°) Déterminer la solution f de (E) qui satisfait les conditions $f(0)=1$ (1) et $f'(\pi)=-2$ (2).

On sait que f est définie par $f(x)=k_1\cos 3x+k_2\sin 3x$ avec $(k_1\,;k_2)\in\mathbb{R}^2$.

$(1) \Leftrightarrow k_1\cos 0+k_2\sin 0=1$

$\Leftrightarrow k_1=1$ (puisque $\sin 0=0$)

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=-3k_1\sin 3x+3k_2\cos 3x$

$(2) \Leftrightarrow -3k_1\sin 3\pi+3k_2\cos 3\pi=-2$

$\Leftrightarrow -3k_2=-2$

$\Leftrightarrow k_2=\dfrac{2}{3}$

La solution cherchée est la fonction $f: x\mapsto \cos 3x+\dfrac{2}{3}\sin 3x$ avec $(k_1\,;k_2)\in\mathbb{R}^2$.

$\boxed{2}$ 1°) Résoudre l'équation différentielle $y''+4y=0$ (E).

2°) Déterminer la solution f de (E) qui satisfait les conditions $f(0)=1$ et $f'(0)=-2$.

Solution :

1°) On reconnaît une équation différentielle de la forme $y''+\omega^2 y=0$ (E) où ω est un réel non nul.

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto k_1\cos 2x+k_2\sin 2x$ avec $(k_1\,;k_2)\in\mathbb{R}^2$.

2°) Déterminer la solution f de (E) qui satisfait les conditions $f(0)=1$ (1) et $f'(0)=-2$ (2).

On sait que f est définie par $f(x)=k_1\cos 2x+k_2\sin 2x$ avec $(k_1\,;k_2)\in\mathbb{R}^2$.

$(1) \Leftrightarrow k_1\cos 0+k_2\sin 0=1$

$\Leftrightarrow k_1=1$ (puisque $\sin 0=0$)

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=-2k_1\sin 2x+2k_2\cos 2x$

$(2) \Leftrightarrow -2k_1\sin 0+2k_2\cos 0=-2$

$\Leftrightarrow 2k_2=-2$

$\Leftrightarrow k_2=-1$

La solution cherchée est la fonction $f: x\mapsto \cos 2x-\sin 2x$ avec $(k_1\,;k_2)\in\mathbb{R}^2$.