Suite donnant une racine carrée de matrice

I. Étude d'un cas particulier

1°) On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

On considère la suite de matrices (X_n) carrées d'ordre 2 définie par son premier terme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right)$.

2°) On calcule les premiers termes de la suite à l'aide de la calculatrice.

Pour cela, il y a deux méthodes possibles.

On peut utiliser la commande « rép » de la calculatrice ou utiliser un programme.

1ère méthode : utilisation de la commande « rép ».

2e méthode : programme permettant de déterminer la racine carrée de la matrice sur TI 83

```
: Prompt N
: [[1,0][0,1]] → [B]
: [[4,2][2,3]] → [A]
: For(I,1,N)
: 0.5 ∗ ([B] + [A] ∗ [B] ^- 1) → [B]
: End
: Disp [B]
```

Indications pour rentrer le programme :

- Pour les matrices [A] et [B], il faut utiliser la touche $\boxed{\text{matrice}}$.
- Pour l'instruction « For(I,1,N) », il s'agit bien de la lettre I.

3°) Une fois le programme tapé, on le teste pour diverses valeurs de N de plus en plus grandes : $N = 10$, $N = 20$.

On constate qu'au bout d'un certain nombre d'étapes on obtient la matrice limite $[B] = \begin{pmatrix} 1,9194 & 0,56217 \\ 0,56217 & 1,6383 \end{pmatrix}$

(les coefficients donnés ici ne sont évidemment que des valeurs approchées).

On constate alors que $[B]^2 = [A]$.
On peut dire que la matrice $[B]$ est une racine carrée de la matrice $[A]$.

4°) Nous allons admettre que la suite (X_n) converge vers une matrice limite L.
On peur affirmer par des règles analogues à celles sur les limites de suites réelles que la matrice L vérifie l'égalité $L = \frac{1}{2}\left(L + AL^{-1}\right)$.
On a donc $L = AL^{-1}$. Par conséquent, $L^2 = A$.

L est bien une racine carrée de L.

II. Généralisation

1°) Étant donnée une matrice carrée A, il n'est en général pas possible de savoir s'il existe une matrice B telle que $B^2 = A$ et lorsqu'il en existe, il n'y a pas de formule permettant de donner une matrice B vérifiant cette égalité.

2°) La suite étudiée dans le **I** permet de déterminer dans certains cas une telle matrice de manière approchée.
La suite se généralise en effet à des matrice A carrées d'ordre quelconque.
Il s'agit de l'algorithme de Jacobi qui permet de déterminer une racine carrée d'une matrice carrée A.

3°) On adapte aisément le programme sur calculatrice donné dans le paragraphe **I** pour une matrice carrée A d'ordre 2 dont il faut saisir les coefficients en entrée.

```
: Prompt N
: Prompt E
: Prompt F
: Prompt G
: Prompt H
: [[1,0][0,1]]  → [B]
: [[E,F][G,H]] → [A]
: For ( I,1,N)
: 0.5 ∗ ([B] + [A] ∗ [B] ^- 1) → [B]
: End
: Disp [B]
```

Pour $E = 4$, $F = 2$, $G = 2$, $H = 3$, on obtient $[B] = \begin{pmatrix} 1,9194 & 0,56217 \\ 0,56217 & 1,6383 \end{pmatrix}$.

On constate que $[B]^2 = [A]$.
Il s'agit de l'algorithme de Jacobi qui permet de déterminer une racine carrée d'une matrice carrée A.

On constate que le programme ne fonctionne pas pour certaines matrices rentrées en [A] comme $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ car, à un indice *n* donné, la matrice X_n n'est pas inversible (cf. message d'erreur de la calculatrice).

On pourrait étudier la vitesse de convergence de la méthode mais nous ne le ferons pas.