La fonction Arctangente

I. Rappels sur la fonction tangente

1°) Définition

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$\tan x$ existe pour tout réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2°) Étude de la fonction tangente

On va s'intéresser à la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ car elle périodique de période π.

Sur cet intervalle, la fonction tangente est continue et strictement croissante.

De plus, $\tan x \xrightarrow[x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} +\infty$ et $\tan x \xrightarrow[x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+]{} -\infty$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3°) Représentation graphique

La courbe de la fonction « tangente » ressemble à un électrocardiogramme.

On vérifie le tracé sur la calculatrice graphique.

II. Généralités

1°) Définition

D'après le théorème de la bijection, la fonction tangente établit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

La bijection réciproque de f est appelée « fonction arctangente ».

$$f^{-1} = \text{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto \text{Arctan}\, x$$

2°) Exemples

$\text{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}$

$\text{Arctan}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$\text{Arctan}\, 0 = 0$

$\text{Arctan}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

3°) Visualisation sur le cercle trigonométrique

Il est possible de faire apparaître Arctan y sur le cercle trigonométrique.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan orienté.

On note $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(0\,;1)$, $\text{A}'(-1\,;0)$, $\text{B}'(0\,;-1)$.

On place le point T de coordonnées $(1\,;y)$ situé sur la tangente en A à $\mathcal{C}$.

On trace la droite (OT). Cette droite coupe l'arc $\overset{\frown}{\text{BB}'}$ contenant A en un point M

Arctan y est la mesure en radians dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\,;\overrightarrow{\text{OM}}\right)$.

4°) Commentaires

1°) Il n'existe pas d'expression de l'Arctangente d'un réel à l'aide des symboles usuels. On dit que la fonction Arctangente est une *fonction transcendante*.

2°) La calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée de l'Arctangente de n'importe quel réel.
Sur la calculatrice on doit se placer en mode « radian ». Puis on tape $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{tan}}$.
Si la calculatrice est en français, il apparaît à l'écran « arctan(».
Si la calculatrice est en français, il apparaît à l'écran « tan-1 »
(Cette notation est une notation de calculatrice qui n'est pas utilisée à l'écrit en dépit d'une similitude manifeste avec la notation d'une bijection réciproque).

Sur la calculatrice, la procédure précédente marche encore lorsqu'on est en mode « degré ». Elle ne correspond pas à la définition de l'Arctangente. Le résultat renvoyé par la calculatrice est dans l'intervalle $]-90\,;90[$.
Elle est utilisée couramment depuis le collège.
Pour le calcul, la calculatrice utilise l'algorithme CORDIC.

5°) Valeurs remarquables

On utilise une lecture inverse du tableau des valeurs remarquables. Nous pouvons également obtenir les valeurs des arctangentes de (cf. voir **V**).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{Arctan } x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

En dehors de ces valeurs et de quelques autres ($\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{8}$ …) il n'est pas possible de calculer un arctangente « à la main ». On est obligé d'utiliser la calculatrice. Il fut un temps pas si lointain puisque nos parents et grands-parents étaient encore en vie ! Fin des années 60 et début des années 1970, nous n'avions pas de calculatrice, on utilisait alors les tables de trigonométrie.

III. Propriétés

1°) $\forall y \in \mathbb{R} \quad \tan(\text{Arctan } y) = y$

2°) $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{Arctan}(\tan x) = x$

3°) x et y sont tout deux réels

$$y = \text{Arctan } x \Leftrightarrow \begin{cases} \tan y = x \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

4°) $\forall y \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan}(-y) = -\text{Arctan } y$

Démonstration :

→ Graphiquement

→ Algébriquement

Soit y un réel fixé. Démontrons que $\text{Arctan}(-y) = -\text{Arctan } y$

Posons $x = \text{Arctan } y$.

On calcule $\tan(-x)$: $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\tan x$.

Or $\tan x = y$ donc $-y = \tan(-x)$ d'où et $y = -\tan(-x)$.

Or $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $-x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Or $-x = \text{Arctan}(-y)$.

D'où $-\text{Arctan } y = \text{Arctan}(-y)$.

Il en résulte que la fonction Arctan est impaire.

IV. Étude de la fonction Arctangente

1°) Propriété fondamentale [dérivabilité et dérivée]

On peut démontrer que la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\textbf{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Cette formule résulte de la formule générale de dérivation d'une bijection réciproque.
On dit que la fonction Arctan est une fonction transcendante à dérivée rationnelle.

2°) Dérivée de Arctan *u* où *u* est une fonction dérivable sur un intervalle I

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan } u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

3°) Limites de la fonction Arctangente

$$\text{Arctan } x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arctan } x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

4°) Représentation graphique de la fonction arctangente

La fonction Arctangente est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Donc sa représentation graphique est la symétrique de la fonction tangente dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthonormé par rapport à la droite d'équation $y = x$.