TS1

Contrôle du mardi 17 mai 2016 (50 min)

Prénom : …… **Nom :** ……

Note : …. / 20

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

La durée de vie (exprimée en heures) d'un panneau électrique d'affichage d'informations est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1°) Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2000 heures ? On donnera la valeur exacte.

…… (un seul résultat, sans égalité)

2°) Quelle est l'espérance de la durée de vie du panneau ?

…… (un seul résultat, sans égalité)

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Dans un parc de loisirs, une des attractions est une descente de type rafting dans des bouées géantes. Les normes de sécurité imposent que le bassin d'arrivée contienne un volume d'eau compris entre 150 et 170 m^3 d'eau. Chaque soir, à la fermeture du parc, l'équipe de maintenance effectue des vérifications et décide, ou non, d'intervenir. Le volume d'eau (exprimé en m^3) contenu dans le bassin, à la fin d'une journée d'exploitation de cette attraction, est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 160$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
On donnera les valeurs arrondies au millième.

1°) Quelle est la probabilité que l'équipe de maintenance soit obligée d'intervenir pour respecter les normes de sécurité ?

…… (un seul résultat, sans égalité)

2°) Quelle est la probabilité que l'équipe de maintenance soit obligée, pour respecter les normes, de rajouter de l'eau dans le bassin à la fin d'une journée d'ouverture ?

…… (un seul résultat, sans égalité)

III. (10 points)

Dans cet exercice, on étudie une maladie due à la propagation d'un virus dans une population.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

Le temps d'incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable aléatoire X_1 suivant une loi normale d'écart-type $\sigma_1 = 10$. On souhaite déterminer son espérance μ_1. On note X_1' la variable aléatoire égale à $\frac{X_1 - \mu_1}{10}$.

1°) Quelle loi la variable aléatoire X_1' suit-elle ? Répondre par une phrase.

……

2°) On donne $P(X_1 < 110) = 0{,}18$. Déterminer μ_1. On donnera la valeur arrondie au dixième.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Partie 2 (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre ($ng.mL^{-1}$), d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de la maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1°) Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire X_2 qui suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 40$ et d'écart-type $\sigma_2 = 8$. On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée. Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 $ng.mL^{-1}$. On donnera la valeur arrondie au millième.

…… (un seul résultat, sans égalité)

2°) Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 $ng.mL^{-1}$ et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 $ng.mL^{-1}$. On appelle X_3 la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en $ng.mL^{-1}$ chez une personne atteinte par la maladie étudiée. On admet que X_3 suit la loi normale d'espérance μ_3 et d'écart-type σ_3. Préciser la valeur de μ_3 et déterminer la valeur arrondie au millième de σ_3.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

IV. (4 points : 1°) a) 1 point ; b) 1 point ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$. Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1°) On prélève au hasard un cylindre dans la production. Pour les deux questions, on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

a) Calculer la probabilité qu'il soit accepté. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

• …… (un seul résultat sans égalité) • …… (un seul résultat sans égalité)

b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

• …… (un seul résultat sans égalité) • …… (un seul résultat sans égalité)

2°) On prélève de manière indépendante 10 cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
Pour les deux questions, on donnera la valeur tronquée au millième.

a) Quelle est la probabilité que les 10 cylindres soient acceptés ?

…… (un seul résultat sans égalité)

b) Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des cylindres soient acceptés ?

…… (un seul résultat sans égalité)

Corrigé du contrôle du 17-5-2016

I.

La durée de vie (exprimée en heures) d'un panneau électrique d'affichage d'informations est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1°) Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2000 heures ? On donnera la valeur exacte.

$e^{-0,2}$ (un seul résultat, sans égalité)

2°) Quelle est l'espérance de la durée de vie du panneau ?

10 000 (un seul résultat, sans égalité)

Ce résultat est exprimé en heures.

II.

Dans un parc de loisirs, une des attractions est une descente de type rafting dans des bouées géantes. Les normes de sécurité imposent que le bassin d'arrivée contienne un volume d'eau compris entre 150 et 170 m^3 d'eau. Chaque soir, à la fermeture du parc, l'équipe de maintenance effectue des vérifications et décide, ou non, d'intervenir. Le volume d'eau (exprimé en m^3) contenu dans le bassin, à la fin d'une journée d'exploitation de cette attraction, est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 160$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
On donnera les valeurs arrondies au millième.

X suit la loi normale d'espérance $\mu = 160$ et d'écart-type $\sigma = 5$.

1°) Quelle est la probabilité que l'équipe de maintenance soit obligée d'intervenir pour respecter les normes de sécurité ?

0,046 (un seul résultat, sans égalité)

On calcule $P\left((X < 150) \cup (X > 170)\right) = 1 - P(150 \leqslant X \leqslant 170)$.

Sur calculatrice, on obtient l'affichage : 0,045500124.

Remarque :

L'intervalle $[150\,;170]$ est la plage de normalité à 95 % de X (formule $[\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]$).
Avec ce résultat, on peut donc dire immédiatement que $P\left((X < 150) \cup (X > 170)\right)$ est environ égal à 5 %.
Mais la valeur de 95 % n'est qu'une valeur approchée et donc le résultat de 5 % manque de précision.

2°) Quelle est la probabilité que l'équipe de maintenance soit obligée, pour respecter les normes, de rajouter de l'eau dans le bassin à la fin d'une journée d'ouverture ?

0,023 (un seul résultat, sans égalité)

On calcule $P(X \leqslant 150)$ ou $P(0 \leqslant X \leqslant 150)$ (puisqu'un volume est toujours positif ou nul). Les deux donnent des résultats dont les premières décimales sont les mêmes.

- Pour $P(0 \leqslant X \leqslant 150)$, on obtient l'affichage suivant sur l'écran de la calculatrice : 0,022750062.

- Pour $P(X \leqslant 150)$, on peut procéder de deux manières :

  1ère manière :
  On écrit : $P(X \leqslant 150) = 0,5 - P(150 \leqslant X \leqslant 160)$ (relation du cours que l'on retrouve aisément en faisant un graphique).

  On obtient l'affichage suivant sur l'écran de la calculatrice : 0,0227500615

  2e manière :
  On calcule $P\left(-10^{99} \leqslant X \leqslant 150\right)$ dont le résultat est proche de $P(X \leqslant 150)$.

  On obtient l'affichage suivant sur l'écran de la calculatrice : 0,022750062.

III.

Dans cet exercice, on étudie une maladie due à la propagation d'un virus dans une population.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

Le temps d'incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable aléatoire X_1 suivant une loi normale d'écart-type $\sigma_1 = 10$. On souhaite déterminer son espérance μ_1. On note X_1' la variable aléatoire égale à $\dfrac{X_1 - \mu_1}{10}$.

1°) Quelle loi la variable aléatoire X_1' suit-elle ? Répondre par une phrase.

On a $X_1' = \dfrac{X_1 - E(X_1)}{\sigma(X_1)}$ donc la variable aléatoire T' suit la loi normale centrée réduite.

2°) On donne $P(X_1 < 110) = 0,18$. Déterminer μ_1. On donnera la valeur arrondie au dixième.

$X_1 < 110 \Leftrightarrow X_1' < \dfrac{110 - \mu_1}{10}$

$P(X_1 < 110)$ donc $P\left(X_1' < \dfrac{110 - \mu_1}{10}\right) = 0,18$.

On note u le réel tel que $P(X_1' < u) = 0,18$.

Par unicité de u, on a : $\frac{110-\mu_1}{10}=u$. Par suite, $\mu_1=110-10u$.

Avec la calculatrice, on tape $110-10\times\text{invnorm}(0.18,0,1)$ [on n'écrit cependant pas $\mu_1=110-10\times\text{invnorm}(0.18,0,1)$].

On obtient $\mu_1\approx 119,2$ (valeur arrondie au dixième).

Partie 2

On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre (ng.mL^{-1}), d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de la maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1°) Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire X_2 qui suit la loi normale d'espérance $\mu_2=40$ et d'écart-type $\sigma_2=8$. On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée. Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1}. On donnera la valeur arrondie au millième.

0,006 (un seul résultat, sans égalité)

2°) Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1}. On appelle X_3 la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL^{-1} chez une personne atteinte par la maladie étudiée. On admet que X_3 suit la loi normale d'espérance μ_3 et d'écart-type σ_3. Préciser la valeur de μ_3 et déterminer la valeur arrondie au millième de σ_3.

Selon l'énoncé, on a : $\mu_3=50$ et $P(X_3<43)=0,1$.

La variable aléatoire $X_3'=\frac{X_3-\mu_3}{\sigma_3}$ suit la loi normale centrée réduite.

$P(X_3<43)=0,1$ donc $P\left(X_3'<\frac{43-\mu_3}{\sigma_3}\right)=0,1$.

On note v le réel tel que $P(X_3'<v)=0,1$.

Par unicité de v, on a : $\frac{43-\mu_3}{\sigma_3}=v$.

On a donc $\sigma_3=\frac{43-\mu_3}{v}$ soit $\sigma_3=\frac{43-50}{v}$ d'où $\sigma_3=-\frac{7}{v}$.

Avec la calculatrice, on tape – 7/invnorm(0.1,0,1).

On obtient $\sigma_3\approx 5,462$ (valeur arrondie au millième).

IV.

Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=1,5$. Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1°) On prélève au hasard un cylindre dans la production. Pour les deux questions, on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

a) Calculer la probabilité qu'il soit accepté. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

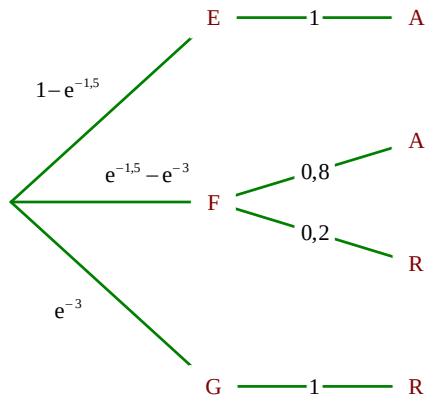
- $1-0,2e^{-1,5}-0,8e^{-3}$ (un seul résultat sans égalité)
- 0,916 (un seul résultat sans égalité)

Considérons les événements A : « le cylindre est accepté » et R : « le cylindre est rectifié ».

Il est conseillé de faire un arbre de probabilités.

On considère les événements :
E : « l'écart est strictement inférieur à 1 » ;
F : « l'écart est compris entre 1 et 2 » ;
G : « l'écart est strictement supérieur à 2 » ;
A : « le cylindre est accepté » ;
R : « le cylindre est refusé ».

On peut écrire $E=(X<1)$, $F=(1\leqslant X\leqslant 2)$, $G=(X>2)$.



On sait alors, d'après l'énoncé, que : $P(A/F)=0,8$; $P(E)=P(X<1)=1-e^{-1,5}$; $P(F)=P(1\leqslant X\leqslant 2)=e^{-1,5}-e^{-3}$.

E, F, G constituent un système complet d'événements.

Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A}) &= P(\mathrm{A}\cap\mathrm{E})+P(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})+P(\mathrm{A}\cap\mathrm{G})\\ &= P(\mathrm{E})\times P(\mathrm{A}/\mathrm{E})+P(\mathrm{F})\times P(\mathrm{A}/\mathrm{F})+P(\mathrm{G})\times P(\mathrm{A}/\mathrm{G})\\ &= 0,8\times\left(\mathrm{e}^{-1,5}-\mathrm{e}^{-3}\right)+1\times\left(1-\mathrm{e}^{-1,5}\right)+0\times\mathrm{e}^{-3}\\ &= 1-0,2\mathrm{e}^{-1,5}-0,8\mathrm{e}^{-3}\end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on trouve : $P(\mathrm{A})=0,915544313...$.

$P(\mathrm{A})\approx 0,915$ (valeur arrondie au millième)

b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième.

- $\dfrac{0,8\left(\mathrm{e}^{-1,5}-\mathrm{e}^{-3}\right)}{1-0,2\mathrm{e}^{-1,5}-0,8\mathrm{e}^{-3}}$ (un seul résultat sans égalité)
- 0,151 (un seul résultat sans égalité)

Sachant que le cylindre est accepté, la probabilité qu'il ait subi une rectification est

$$\begin{aligned}P(\mathrm{R}/\mathrm{A}) &= \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{R})}{P(\mathrm{A})}\\ &= \frac{0,8\left(\mathrm{e}^{-1,5}-\mathrm{e}^{-3}\right)}{1-0,2\mathrm{e}^{-1,5}-0,8\mathrm{e}^{-3}}\end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $P(\mathrm{R}/\mathrm{A})=0,151466697\ldots$.

2°) On prélève de manière indépendante 10 cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
Pour les deux questions, on donnera la valeur tronquée au millième.

a) Quelle est la probabilité que les 10 cylindres soient acceptés ?

0,413 (un seul résultat sans égalité)

On prélève de manière indépendante 10 cylindres de la production.
La variable aléatoire Z égale au nombre de cylindres acceptés suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=P(\mathrm{A})$.

On cherche $P(\mathrm{Z}=10)=\left[P(\mathrm{A})\right]^{10}=\left(1-0,2\mathrm{e}^{-1,5}-0,8\mathrm{e}^{-3}\right)^{10}$.

Avec la calculatrice, on trouve : $P(\mathrm{Z}=10)=0,413803056\ldots$.

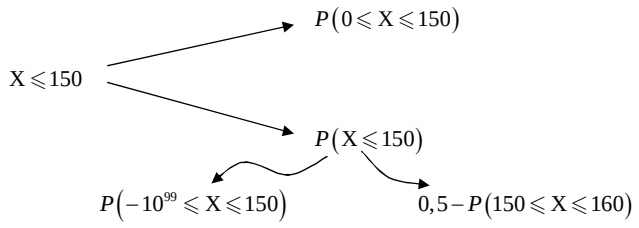
b) Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des cylindres soient acceptés ?

0,999 (un seul résultat sans égalité)

On cherche $P(\mathrm{Z}\geqslant 5)$ que l'on transforme en $1-P(\mathrm{Z}\geqslant 4)$ pour pouvoir utiliser la calculatrice.

Sur la calculatrice, on tape : 1−binomFRép(10,1−0.2e^(−1,5)−0,8e^(−3),4).

On obtient $P(\mathrm{Z}\geqslant 5)=0,99994353\ldots$.

Appendice : schéma noté par Cécile Cormier le 19-5-2017 pour la question **II. 2°)**

X suit la loi normale d'espérance $\mu=160$ et d'écart-type $\sigma=5$.