1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 3 mai 2016 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. (1 point)

On considère les vecteurs $\vec{u}\,(-2\,;4)$ et $\vec{v}\,(-5\,;-2)$.

Compléter l'égalité suivante. On écrira seulement deux étapes de calcul puis le résultat.

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ………………………………………………………………………

II. (2 points : 1 point + 1 point)

Soit D_1 et D_2 les droites d'équations cartésiennes respectives $3x-2y+5=0$ et $8x+12y+1=0$.
Donner un vecteur directeur de chacune des droites.

$\overrightarrow{u_1}$ (…..;…..) est un vecteur directeur de D_1 ; $\overrightarrow{u_2}$ (…..;…..) est un vecteur directeur de D_2.

Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ (calcul sur une ligne).

……

Que peut-on en déduire pour D_1 et D_2 ? Répondre en une phrase.

……

……

III. (3 points)

Déterminer le(s) réel(s) m tels que les vecteurs $\vec{u}\,(m\,;3)$ et $\vec{v}\,(3m\,;-4)$ soient orthogonaux.
On attend une démarche par chaîne d'équivalences en complétant le modèle donné ci-contre.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

IV. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 4°) 2 points)

On considère les points $\mathrm{A}(1\,;-2)$, $\mathrm{B}(6\,;0)$ et $\mathrm{C}(2\,;3)$.

1°) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ (…..;…..)

2°) Calculer la distance BC.

BC = …….. (un seul résultat)

3°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre B passant par C.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne ………………………………………………

4°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[\mathrm{BC}]$.

……………………………………………………………………… (une seule équation cartésienne sans justifier)

5°) Déterminer une équation cartésienne de la droite *D* passant par A et perpendiculaire à (BC) avec le même modèle de rédaction qu'à la question 3°).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-4x-3=0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-3=0$

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de $\mathcal{C}$ et de (Oy). On précise que $y_A > y_B$.
On rédigera ainsi (modèle à recopier et compléter) :
« Les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de (Oy) sont les solutions de l'équation ……….. ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

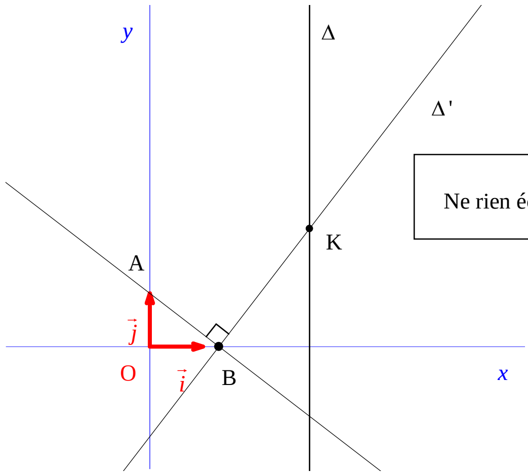
……………………………………………………………………………………………………

VI. (4 points)

On considère le point A de coordonnées $(0\,;1)$. On note Δ la droite d'équation $x=3$.

Soit B un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(m\,;0)$ où m est un réel quelconque.

Soit Δ' la perpendiculaire à (AB) passant par B. On note K le point d'intersection des droites Δ et Δ'.
Exprimer les coordonnées de K en fonction de *m*.



Ne rien écrire sur le graphique.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Bonus : Quel est l'ensemble des points K lorsque *m* décrit $\mathbb{R}$?

Corrigé du contrôle du 3-5-2016

I.

On considère les vecteurs $\vec{u}\,(-2\,;4)$ et $\vec{v}\,(-5\,;-2)$.

Compléter l'égalité suivante. On écrira seulement deux étapes de calcul puis le résultat.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-2)\times(-5)+4\times(-2)=10-8=2$

II.

Soit D_1 et D_2 les droites d'équations cartésiennes respectives $3x-2y+5=0$ et $8x+12y+1=0$.
Donner un vecteur directeur de chacune des droites.

$\overrightarrow{u_1}\,(2\,;3)$ est un vecteur directeur de D_1 ; $\overrightarrow{u_2}\,(-12\,;8)$ est un vecteur directeur de D_2.

Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ (calcul sur une ligne).

$\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=2\times(-12)+3\times8=-24+24=0$

Que peut-on en déduire pour D_1 et D_2 ? Répondre en une phrase.

$\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$ donc $D_1\perp D_2$.

III.

Déterminer le(s) réel(s) m tels que les vecteurs $\vec{u}\,(m\,;3)$ et $\vec{v}\,(3m\,;-4)$ soient orthogonaux.
On attend une démarche par chaîne d'équivalences en complétant le modèle donné au verso.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$\Leftrightarrow m\times3m+3\times(-4)=0$

$\Leftrightarrow 3m^2-3\times4=0$

$\Leftrightarrow m^2=4$

$\Leftrightarrow m=2$ ou $m=-2$

IV.

On considère les points $A(1\,;-2)$, $B(6\,;0)$ et $C(2\,;3)$.

1°) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC}\,(-4\,;3)$$

2°) Calculer la distance BC.

$$BC=5 \text{ (un seul résultat)}$$

On utilise les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ calculées à la question précédente.

$BC^2=(-4)^2+3^2=25$ donc $BC=5$.

3°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre B passant par C.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$M\in\mathcal{C} \Leftrightarrow BM^2=25$ (1ère ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow (x-6)^2+y^2=25$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-12x+11=0$

$\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $x^2+y^2-12x+11=0$.

4°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[BC]$.

$$x^2+y^2-8x-3y+12=0 \text{ (une seule équation cartésienne sans justifier)}$$

1ère méthode :

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$M\in\mathcal{C}' \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$ (ligne sans coordonnées, faire un graphique pour comprendre)

$\Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{BM}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{CM}\right)=0$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}=0$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow (x-6)\times(x-2)+y\times(y-3)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-8x-3y+12=0$

2^e^ méthode : moins bonne

On calcule les coordonnées du milieu I de $[\text{BC}]$.

Le cercle $\mathcal{C}'$ a pour centre I et pour rayon $\dfrac{\text{BC}}{2}=\dfrac{5}{2}$.

On utilise ensuite la même méthode que celle utilisée à la question 3°).

5°) Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par A et perpendiculaire à (BC) avec le même modèle de rédaction qu'à la question 3°).

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M}\in D \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{BC}}\bullet\overrightarrow{\text{AM}}=0$ (1^ère^ ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow (-4)\times(x-1)+3\times(y+2)=0$ (on utilise les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$ calculées à la question 1°)

$\Leftrightarrow -4x+3y+10=0$

D a pour équation cartésienne $-4x+3y+10=0$.

V.

1°) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-4x-3=0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M}\in\mathcal{C} \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-3=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2-7=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=7$ (ou $(x-2)^2+(y-0)^2=7$)

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2\,;\,0)$ et de rayon $r=\sqrt{7}$.

2°) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $(\text{O}y)$. On précise que $y_\text{A}>y_\text{B}$.
On rédigera ainsi (modèle à recopier et compléter) :
« Les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $(\text{O}y)$ sont les solutions de l'équation ……….. ».

On utilise l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ donnée dans l'énoncé.

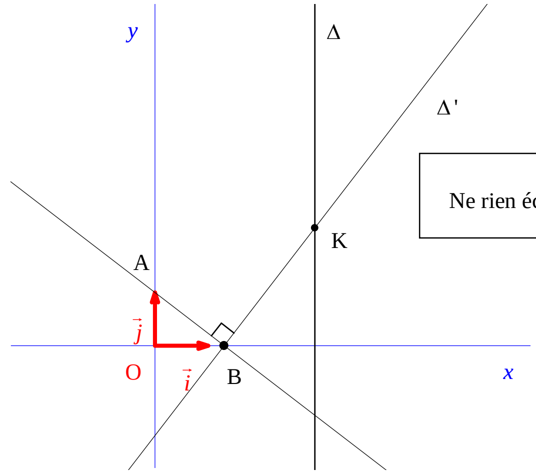
La droite $(\text{O}y)$ a pour équation $x=0$.

Les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $(\text{O}y)$ sont les solutions de l'équation $y^2-3=0$ (on remplace x par 0 dans l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$).
Les solutions de cette équation sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
Donc les points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et de $(\text{O}y)$ ont pour coordonnées respectives $(0\,;\,\sqrt{3})$ et $(0\,;\,-\sqrt{3})$.

VI.

On considère le point A de coordonnées $(0\,;1)$. On note Δ la droite d'équation $x=3$.
Soit B un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(m\,;\,0)$ où m est un réel quelconque différent de 3.
Soit Δ' la perpendiculaire à (AB) passant par B. On note K le point d'intersection des droites Δ et Δ'.
Exprimer les coordonnées de K en fonction de m.

On considère le point A de coordonnées $(0\,;1)$. On note Δ la droite d'équation $x=3$.
Soit B un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(m\,;\,0)$ où m est un réel quelconque.
Soit Δ' la perpendiculaire à (AB) passant par B. On note K le point d'intersection des droites Δ et Δ'.
Exprimer les coordonnées de K en fonction de m.



Ne rien écrire sur le graphique.

$\text{K}\in\Delta$ donc $x_\text{K}=3$.

$(\text{BA})\perp(\text{BK})$ donc $\overrightarrow{\text{BA}}\bullet\overrightarrow{\text{BK}}=0$ (1).

$\overrightarrow{\text{BA}}(-m\,;1)$

$\overrightarrow{\text{BK}}(3-m\,;\,y_\text{K})$

Donc (1) donne $-m\times(3-m)+1\times y_\text{K}=0$ soit $y_\text{K}=m\times(3-m)=3m-m^2$.

Le point K a donc pour coordonnées $(3\,;3m-m^2)$.

Bonus : Quel est l'ensemble des points K lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

On sait déjà que K appartient à la droite Δ.

L'ensemble des points K lorsque m décrit $\mathbb{R}$ est une partie de la droite Δ.
On sait par ailleurs que $y_\text{K}=3m-m^2$.

On considère la fonction $f : m \mapsto 3m - m^2$.

C'est une fonction polynôme du second degré.

Son maximum est égal à $\frac{9}{4}$; il est atteint en $m = \frac{3}{2}$.

On peut aussi faire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Lorsque m décrit $\mathbb{R}$, $3m - m^2$ décrit l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{9}{4}\right]$.

Donc lorsque m décrit $\mathbb{R}$, K décrit la demi-droite définie par l'équation $x = 3$ et l'inéquation $y \leqslant \frac{9}{4}$ (les deux en même temps).