

Les verres doseurs

Vous avez à votre disposition :

- un robinet d'eau ;
- deux verres ayant chacun pour capacité un nombre entier de centilitres, respectivement A et B (avec $A < B$) ;
- une évacuation.

Vous pouvez effectuer les actions suivantes :

- remplir un verre à ras bord ;
- vider un verre intégralement ;
- vider un verre dans un autre jusqu'à ce que le premier soit vide ou que le second soit plein.

L'objectif de l'activité est de répondre à la question suivante :

Connaissant A et B, déterminez tous les volumes d'eau différents (non nuls) que l'on peut obtenir (quantité d'eau pouvant être contenue dans un unique verre).

1°) Dans cette question, $A = 3$ et $B = 5$.

Déterminer tous les volumes d'eau que l'on peut obtenir.

2°) Déterminer tous les volumes d'eau que l'on peut obtenir lorsque $A = 14$ et $B = 32$.

3°) Bob souhaite résoudre le problème pour $A = 20$ et $B = 64$. Pour cela, il a écrit l'algorithme suivant :

Initialisations :

C prend la valeur 0
B prend la valeur 64

Traitement :

Tantque $C \neq 64$ **Faire**

Si $C + 20 \leq B$

 Alors C prend la valeur $C + 20$

Sinon C prend la valeur $20 - (64 - C)$

FinSi

FinTantque

Sortie :

Afficher C

- Exécuter à la main cet algorithme et écrire les valeurs successives prises par C. Que produit cet algorithme ?
- Modifier l'algorithme pour que les volumes donnés dépendent des valeurs A et B fournies par l'utilisateur.
- Modifier l'algorithme pour qu'il affiche le nombre de volumes différents obtenus.
- Programmer le dernier algorithme dans un langage de programmation.
- Conjecturer une condition sur A et B pour laquelle on obtient chacun des volumes d'eau compris entre A et B.

Solution :

1°) Les volumes d'eau possibles, en centilitres, sont : 1, 2, 3, 4, 5.

2°) Les volumes d'eau possibles, en centilitres, sont : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32.

3°)

a) Les valeurs prises par C sont 20, 40, 60, 64, 44, 24, 4, 64, 48, 28, 8, 64, 52, 32, 12, 64, 56, 36, 16 soit dans l'ordre croissant : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64.

On remarque que cet algorithme donne tous les multiples du PGCD de A et B inférieurs ou égaux à B.

Ici $\text{PGCD}(20, 64) = 4$.

c) Programme final :

```
: 0 → C
: 1 → A
: 0 → B
: 1 → J
: While A ≥ B
: Prompt A
: Prompt B
: End
: 1 → I
: ClrList L1
: ClrList L2
: While C ≠ B
: If C + A ≤ B
: Then
: C + A → C
: C → L1(I)
: If A ≤ C and C ≤ B
: Then
: C → L2(J)
: J + 1 → J
: End
: I + 1 → I
: Else
: A - (B - C) → C
: C → L1(I)
: I + 1 → I
: If A ≤ C and C ≤ B
: Then
: C → L2(J)
: J + 1 → J
: End
: End
: End
: SortA(L1)
: SortA(L2)
: Disp L1
: Disp L2
```