1ère S1

Contrôle du mardi 12 avril 2016 (50 minutes)

Prénom : ………………………………….… **Nom :** ……………………………...…… **Note : …. / 20**

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

Dans le plan *P*, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\text{AB}=2a$ et $\text{AC}=a$ $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$.

On note I le milieu de $[\text{BC}]$ et J celui de $[\text{AI}]$.

1°) Exprimer AI en fonction de *a*.

………………………… (une seule égalité)

2°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\left(\overrightarrow{\text{MB}}+\overrightarrow{\text{MC}}\right)=2a^2$.

Modèle de rédaction à respecter impérativement :

- On commencera la recherche de l'ensemble par la phrase « Soit M un point quelconque de *P*. »
- On rédigera la recherche de la manière suivante sous la forme d'une « chaîne » d'équivalences :

« $\text{M}\in E$ $\Leftrightarrow$ ………

$\Leftrightarrow$ ………. »

- On conclura ainsi : « L'ensemble *E* est ………………… » (aucune figure n'est demandée).

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (1 point)

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0=-5$ et de raison 0,8.

Étudier la monotonie de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

………

………

………

………

………

III. (1 point)

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1=3$ et de raison $-\dfrac{1}{2}$.

Exprimer u_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1).

La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être *n*.

…………………………….. (une seule égalité)

IV. (2 points)

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=8$ et de raison 3.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ (on peut écrire $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$).

- Combien la somme S_n comporte-t-elle de termes ?

………………………… (une seule réponse, sans faire de phrase)

- Donner une expression simplifiée S_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel fixé).

Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.

La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$S_n=$ ....

V. (4 points : 2 points + 2 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5\times 2^{n-1}}{3^{2n+1}}$ et $v_n = 4^n \times 2^{3n+3}$.

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. Préciser leurs premiers termes et leurs raisons.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VI. (3 points)

Un marcheur décide de réaliser un entraînement quotidien.
Le premier jour, il effectue une marche de 3 km. Chaque jour, il augmente la distance de 5 % par rapport à la veille.
Au bout de combien de jours la distance totale parcourue depuis le premier jour de son entraînement aura-t-elle dépassé 2000 km ?

…………………………….. (une seule réponse sans justifier)

VII. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point + 1 point)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{3}$ pour tout entier naturel n. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 2u_n - 1$.

Il est demandé de tirer les traits de fractions à la règle.

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 2u_{n+1} - 1$

$=$

$=$

$=$

$=$

2°) Recopier et complétant la phrase donnant la nature de la suite (v_n) en donnant toutes les précisions utiles.

« D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

………

………

3°) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 12-4-2016

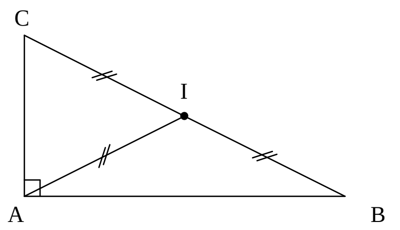
I.

Dans le plan P, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\text{AB} = 2a$ et $\text{AC} = a$ $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.

On note I le milieu de $[\text{BC}]$ et J celui de $[\text{AI}]$.

1°) Exprimer AI en fonction de a.

$$\text{AI} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \quad \text{(une seule égalité)}$$



1[ère] méthode :

On calcule BC avec le théorème de Pythagore.
On trouve : $\text{BC} = a\sqrt{5}$.

Or dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse (propriété).

Donc $\text{AI} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

2[e] méthode :

On applique le théorème de la médiane dans le triangle ABC.

2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\overrightarrow{\text{MA}} \bullet \left(\overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}}\right) = 2a^2$.

Modèle de rédaction à respecter impérativement :

- On commencera la recherche de l'ensemble par la phrase « Soit M un point quelconque de P. »
- On rédigera la recherche de la manière suivante sous la forme d'une « chaîne » d'équivalences :

« $\text{M} \in E \Leftrightarrow$ ……….
$\Leftrightarrow$ ……… »

- On conclura ainsi : « L'ensemble E est ………………… » (aucune figure n'est demandée).

Soit M un point quelconque de P.

$\text{M} \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MA}} \bullet \left(\overrightarrow{\text{MB}} + \overrightarrow{\text{MC}}\right) = 2a^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MA}} \bullet \left(2\overrightarrow{\text{MI}}\right) = 2a^2$ (car I est le milieu de [BC], voir encadré ci-dessous)

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\text{MA}} \bullet \overrightarrow{\text{MI}}\right) = 2a^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MA}} \bullet \overrightarrow{\text{MI}} = a^2$

$\Leftrightarrow \text{MJ}^2 - \dfrac{\text{AI}^2}{4} = a^2$ (d'après une formule de la médiane car J est le milieu de [AI])

$\Leftrightarrow \text{MJ}^2 - \dfrac{\frac{5a^2}{4}}{4} = a^2$

$\Leftrightarrow \text{MJ}^2 = a^2 + \dfrac{5a^2}{16}$

$\Leftrightarrow \text{MJ}^2 = \dfrac{21a^2}{16}$

$\Leftrightarrow \text{JM} = \dfrac{a\sqrt{21}}{4}$

L'ensemble E est le cercle de centre J et de rayon $\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$.

Comme I est le milieu de [BC], $\forall \text{M} \in P \quad \overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{MB}} = 2\overrightarrow{\text{MI}}$.

II.

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 0,8.
Étudier la monotonie de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

On sait que $u_0 = -5$ donc $u_0 < 0$ et la raison q vaut 0,8 donc $0 < q < 1$.
Par conséquent, (u_n) est donc strictement croissante à partir de l'indice 0.

III.

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $-\dfrac{1}{2}$.

Exprimer u_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1).
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être *n*.

$$u_n = 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ (une seule égalité)}$$

On peut transformer l'expression sous la forme suivante : $u_n = -6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. Ce n'est cependant pas utile du tout.

IV.

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 8$ et de raison 3.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$).

• Combien la somme S_n comporte-t-elle de termes ?

$n+1$ (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$$S_n = 4\times\left(3^{n+1}-1\right)$$

On pouvait aussi écrire S_n sous la forme développée suivante $S_n = 12\times 3^n - 4$ qui ne présente pas forcément grand intérêt.

$\forall n \in \mathbb{N}\quad S_n = 8\times\dfrac{1-3^{n+1}}{1-3}$

$= 8\times\dfrac{1-3^{n+1}}{-2}$

$= -4\times\left(1-3^{n+1}\right)$ (on simplifie le 8 avec le – 2 du dénominateur)

$= 4\times\left(3^{n+1}-1\right)$

V.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5\times 2^{n-1}}{3^{2n+1}}$ et $v_n = 4^n \times 2^{3n+3}$.

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. Préciser leurs premiers termes et leurs raisons.

$\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = \dfrac{5\times 2^n \times 2^{-1}}{3^{2n}\times 3}$

$= \dfrac{5\times 2^{-1}}{3}\times\dfrac{2^n}{3^{2n}}$

$= \dfrac{5}{6}\times\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{5}{6}$ et de raison $q = \dfrac{2}{9}$.

$\forall n \in \mathbb{N}\quad v_n = 4^n \times 2^{3n+3}$

$= 4^n \times 2^{3n} \times 2^3$

$= 4^n \times \left(2^3\right)^n \times 2^3$

$= 4^n \times 8^n \times 8$

$= 8\times 32^n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 8$ et de raison $q' = 32$.

Un certain nombre d'élèves n'ont pas respecté les notations d'écriture des suites avec des parenthèses.

VI.

Un marcheur décide de réaliser un entraînement quotidien.
Le premier jour, il effectue une marche de 3 km. Chaque jour, il augmente la distance de 5 % par rapport à la veille.
Au bout de combien de jours la distance totale parcourue depuis le premier jour de son entraînement aura-t-elle dépassé 2000 km ?

73 (une seule réponse sans justifier)

Il s'agit d'un exercice de prise d'initiative. La démarche de résolution n'est pas donnée dans l'énoncé.
L'énoncé ne parle pas de suite ; c'est à l'élève de modéliser la situation par une suite.
C'est à l'élève de « créer » une suite.

Il y a deux méthodes différentes.

1[ère] méthode :

① Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n la distance parcourue en kilomètres lors de l'entraînement le n-ième jour.

② D'après l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = 1,05 u_n$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 3$ et de raison 1,05.

③ On note S_n la distance parcourue entre le 1[er] et le n-ième jour.

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

$$= 3 \times \frac{1,05^n - 1}{1,05 - 1}$$

$$= 3 \times \frac{1,05^n - 1}{0,05}$$

$$= \frac{3}{0,05} \times \left(1,05^n - 1\right)$$

$$= 60 \times \left(1,05^n - 1\right)$$

④ On cherche le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 2000$.

Le moyen le plus rapide est de rentrer la fonction $f : x \mapsto 60 \times \left(1,05^x - 1\right)$.

On trouve que la distance totale parcourue depuis le premier jour de son entraînement aura dépassé 2000 km au bout de 73 jours [$S_{73} = f(73) = 2053,3434516...$].

2[e] méthode :

On utilise un algorithme que l'on programme ensuite sur calculatrice.

Il s'agit d'un algorithme de détermination de valeur seuil avec boucle « Tantque ».

Initialisations :
u prend la valeur 3
d prend la valeur *u*
i prend la valeur 1

Traitement :
Tantque $d \leqslant 2000$ **Faire**
    u prend la valeur $1,05 \times u$
    d prend la valeur $d + u$
    i prend la valeur $i + 1$
FinTantque

Sortie :
Afficher *i*

```
: 3 → U
: U → D
: 1 → I
: While D ⩽ 2000
: U*1.05 → U
: D+U → D
: I+1 → I
: End
: Disp I
```

On retrouve la valeur 73.

VII.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{3}$ pour tout entier naturel *n*. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = 2u_n - 1$.

Il est demandé de tirer les traits de fractions à la règle.

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

1ère méthode : On « passe » en v_n à la fin.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 2u_{n+1} - 1$$

$$= 2 \times \frac{u_n + 1}{3} - 1$$

$$= \frac{2u_n + 2}{3} - 1$$

$$= \frac{2u_n - 1}{3}$$

$$= \frac{v_n}{3}$$

2e méthode : On « passe » en v_n assez tôt.

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = 2u_n - 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \;\; 2u_n = v_n + 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 2u_{n+1} - 1$$

$$= 2 \times \frac{u_n + 1}{3} - 1$$

$$= \frac{2u_n + 2}{3} - 1$$

$$= \frac{v_n + 1 - 1}{3}$$

$$= \frac{v_n}{3}$$

2°) Recopier et complétant la phrase donnant la nature de la suite (v_n) en donnant toutes les précisions utiles.

« D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -3$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.

3°) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = 2u_n - 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = \dfrac{v_n + 1}{2}$.

Finalement, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = \dfrac{1 - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}$.

En transformant l'expression de u_n, on obtient d'autres expressions de u_n en fonction de *n* :

$$u_n = \frac{1}{2}\left[1 - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 3 \times \frac{1}{3^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

Cette dernière égalité peut aussi s'écrire $u_n = \dfrac{1 - \frac{1}{3^{n-1}}}{2}$ ou $u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2 \times 3^{n-1}}$.