TS1

Contrôle du mardi 5 avril 2016 (50 minutes)

Prénom et nom : ……..…… **Note :** …….. / 20

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Un livreur a promis de passer chez un client entre 10 h et 11 h. On suppose que la probabilité de son passage est uniformément répartie.
Soit X la variable aléatoire égale au temps en heures écoulé après 10 h. On suppose que X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$.
On donnera tous les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

1°) Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 10 h 10 min ?

…… (un seul résultat sans égalité)

2°) Quelle est la probabilité qu'il arrive entre 10 h 20 min et 10 h 40 min ?

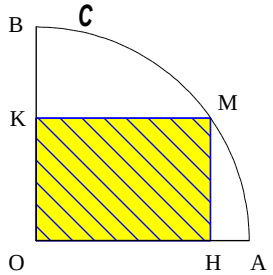
…… (un seul résultat sans égalité)

3°) Sachant que le client a attendu le livreur 15 minutes, quelle est la probabilité qu'il arrive dans les dix prochaines minutes ?

…… (un seul résultat sans égalité)

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Soit $\mathcal{C}$ un quart de cercle de centre O de rayon 1. On note A et B ses extrémités.
Soit M un point au hasard choisi sur $\mathcal{C}$. On note H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OA) et sur (OB).



Ne rien écrire sur la figure.

On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ et l'on admet que le choix de M au hasard sur le cercle $\mathcal{C}$ peut être modélisé par le choix de θ au hasard dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1°) Démontrer que l'aire du rectangle OHMK est donnée par $\mathcal{A}_{\text{OHMK}} = \frac{\sin 2\theta}{2}$.

……

……

……

……

……

2°) Calculer la probabilité que l'aire de OHMK soit inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

……

……

……

……

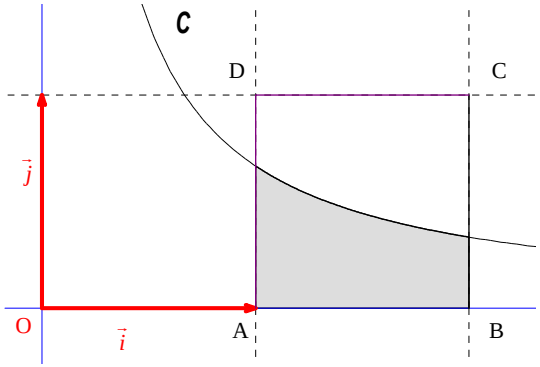
……

……

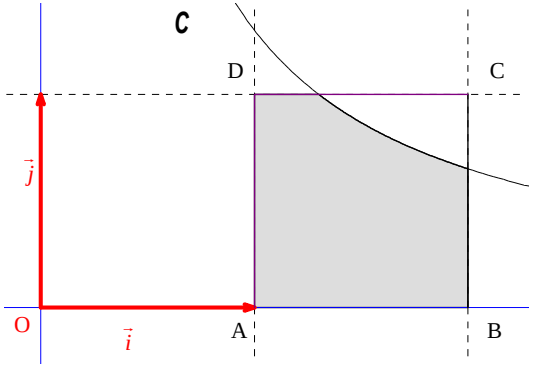
……

III. (6 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \frac{a}{x}$ où a est un réel tel que $0 < a < 2$. On considère les points $A(1\,;0)$, $B(2\,;0)$, $C(2\,;1)$, $D(1\,;1)$.
La courbe $\mathcal{C}$ partage le carré ABCD en deux parties.
On note Z la partie du carré située dans le carré en dessous de la courbe $\mathcal{C}$.
Calculer l'aire de Z en fonction de a. On distinguera deux cas : $0 < a \leqslant 1$ (graphique 1) et $1 < a < 2$ (graphique 2).
Il est demandé de ne rien écrire sur les graphiques.



Graphique 1



Graphique 2

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point + 1 point)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[1;9]$ par $f(x)=\dfrac{9}{8x^2}$.

1°) Démontrer que f est une densité de probabilité sur I.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P) admettant f pour densité de probabilité.
Déterminer le réel $a \in \mathrm{I}$ tel que $P(\mathrm{X} \geqslant a) = P(\mathrm{X} \leqslant a)$.

…… (une seule égalité)

3°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X (valeurs exactes).

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) =$ ..... ; $\mathrm{V}(\mathrm{X}) =$ .....

Corrigé du contrôle du 5-4-2016

I.

Un livreur a promis de passer chez un client entre 10 h et 11 h. On suppose que la probabilité de son passage est uniformément répartie.
Soit X la variable aléatoire égale au temps en heures écoulé après 10 h. On suppose que X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$.
On donnera tous les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

1°) Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 10 h 10 min ?

$\frac{1}{6}$ (un seul résultat sans égalité)

2°) Quelle est la probabilité qu'il arrive entre 10 h 20 min et 10 h 40 min ?

$\frac{1}{3}$ (un seul résultat sans égalité)

3°) Sachant que le client a attendu le livreur 15 minutes, quelle est la probabilité qu'il arrive dans les dix prochaines minutes ?

$\frac{2}{9}$ (un seul résultat sans égalité)

Solution détaillée :

On note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$.

On convertit toutes les durées en heures.

1°) $10 \text{ min} = \frac{10}{60} \text{ h} = \frac{1}{6} \text{ h}$

$$P\left(X \leqslant \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

2°) $20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$ et $40 \text{ min} = \frac{2}{3} \text{ h}$

$$P\left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

3°) On convertit les durées en heures : $15 \text{ min} = \frac{15}{60} \text{ h}$ et $25 \text{ min} = \frac{25}{60} \text{ h}$.

Or $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ et $\frac{25}{60} = \frac{5}{12}$.

$$P\left(X \leqslant \frac{5}{12} / X \geqslant \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(\left(X \leqslant \frac{5}{12}\right) \cap \left(X \geqslant \frac{1}{4}\right)\right)}{P\left(X \geqslant \frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{P\left(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{5}{12}\right)}{P\left(X \geqslant \frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{5}{12} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

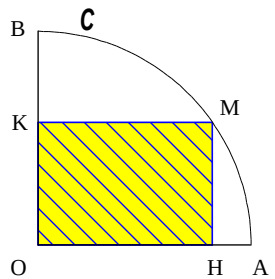
$$= \frac{\frac{2}{12}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{2}{9}$$

II.

Soit $\mathcal{C}$ un quart de cercle de centre O de rayon 1. On note A et B ses extrémités.
Soit M un point au hasard choisi sur $\mathcal{C}$. On note H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OA) et sur (OB).



Ne rien écrire sur la figure.

On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ et l'on admet que le choix de M au hasard sur le cercle $\mathcal{C}$ peut être modélisé par le choix de θ au hasard dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1°) Démontrer que l'aire du rectangle OHMK est donnée par $\mathcal{A}_{\text{OHMK}} = \frac{\sin 2\theta}{2}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{OHMK}} &= \text{OH}\times\text{OK}\\ &= \cos\theta\times\sin\theta\\ &= \frac{\sin 2\theta}{2}\end{aligned}$$

2°) Calculer la probabilité que l'aire de OHMK soit inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

On cherche les réels θ de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\mathcal{A}_{\text{OHMK}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}$ (1).

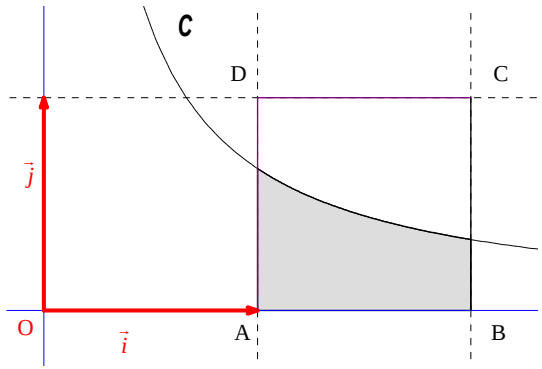
Il est important de remarquer que $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $2\theta \in [0\,;\pi]$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \frac{\sin 2\theta}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\\ &\Leftrightarrow \sin 2\theta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant 2\theta \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant 2\theta \leqslant \pi \quad \text{(résolution à l'aide du cercle trigonométrique)}\\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

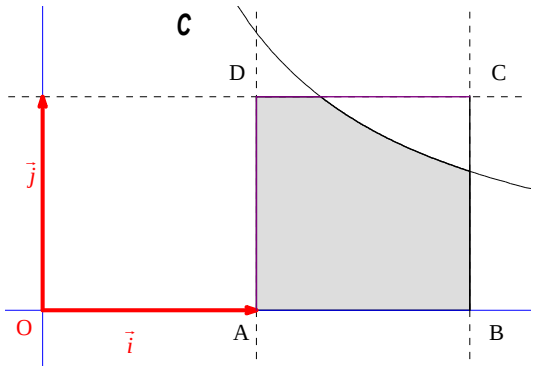
$$\begin{aligned}P\left(\mathcal{A}_{\text{OHMK}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\right) &= P\left(\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{2}\right]\right)\\ &= \frac{\frac{\pi}{6}-0}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(formule de la probabilité d'un intervalle pour la loi uniforme sur } \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right])\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

III.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \frac{a}{x}$ où a est un réel tel que $0 < a < 2$. On considère les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(2\,;0)$, $\text{C}(2\,;1)$, $\text{D}(1\,;1)$.
La courbe $\mathcal{C}$ partage le carré ABCD en deux parties.
On note Z la partie du carré située dans le carré en dessous de la courbe $\mathcal{C}$.
Calculer l'aire de Z en fonction de a. On distinguera deux cas : $0 < a \leqslant 1$ (graphique 1) et $1 < a < 2$ (graphique 2).



Graphique 1



Graphique 2

Il est demandé de ne rien écrire sur les graphiques.

Calculons l'aire $\mathcal{A}$ de Z.

1er cas : $0 < a \leqslant 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^2 \frac{a}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= a\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= a\left[\ln x\right]_1^2\\ &= a\ln 2 \text{ u. a.}\end{aligned}$$

2e cas : $1 < a < 2$

On décompose la zone Z en deux.

En effet, la courbe $\mathcal{C}$ coupe la droite (CD) au point E d'abscisse a (calcul évident en résolvant l'équation $\frac{a}{x} = 1$).
On note F le point de coordonnées $(a\,;0)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_{\text{AFED}} + \int_a^2 \frac{a}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= (a-1)\times 1 + a\left[\ln x\right]_a^2\\ &= a-1+a\ln 2 - a\ln a \text{ u. a.}\end{aligned}$$

On a aussi : $\mathcal{A} = a-1+a\ln\frac{2}{a}$ u. a.

IV.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[1;9]$ par $f(x)=\dfrac{9}{8x^2}$.

1°) Démontrer que f est une densité de probabilité sur I.

• f définie et continue sur l'intervalle I (car c'est la restriction d'une fonction polynôme à l'intervalle I).

• f est positive ou nulle sur l'intervalle I (c'est-à-dire f est à valeurs positives ou nulles).

En effet, $\forall x \in \mathrm{I} \quad x^2>0$ donc $\forall x \in \mathrm{I} \quad \dfrac{9}{8x^2}>0$.

• On calcule l'intégrale de f sur I.

$$\begin{aligned}\int_1^9 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^9 \frac{9}{8x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{9}{8}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^9\\ &= \frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{9}\right)\\ &= \frac{9}{8}\times\frac{8}{9}\\ &= 1\end{aligned}$$

D'après les trois conditions précédentes, f est une densité de probabilité sur I.

2°) Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P) admettant f pour densité de probabilité.
Déterminer le réel $a \in \mathrm{I}$ tel que $P(\mathrm{X} \geqslant a)=P(\mathrm{X} \leqslant a)$.

$$a=1{,}8 \text{ ou } a=\frac{9}{5} \quad \text{(une seule égalité)}$$

On cherche le réel $a \in \mathrm{I}$ tel que $P(\mathrm{X} \geqslant a)=P(\mathrm{X} \leqslant a) \quad (1)$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow P(\mathrm{X} \leqslant a)=1-P(\mathrm{X} \leqslant a)\\ &\Leftrightarrow 2P(\mathrm{X} \leqslant a)=1\\ &\Leftrightarrow P(\mathrm{X} \leqslant a)=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{9}{8}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow 1-\frac{1}{a}=\frac{4}{9}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{5}{9}\\ &\Leftrightarrow a=\frac{9}{5}\end{aligned}$$

3°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X (valeurs exactes).

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{9\ln 3}{4} \quad ; \quad \mathrm{V}(\mathrm{X})=9-\left(\frac{9}{4}\ln 3\right)^2$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_1^9 x f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^9 x \times \frac{9}{8x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{9}{8}\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= \frac{9}{8}\left[\ln x\right]_1^9$$

$$= \frac{9}{8}\ln 9$$

$$= \frac{9}{8}\ln 3^2$$

$$= \frac{9}{8} \times 2\ln 3$$

$$= \frac{9\ln 3}{4}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \int_1^9 x^2 f(x)\ \mathrm{d}x - \left[\mathrm{E}(\mathrm{X})\right]^2 \quad \text{(formule de Koenig-Huyghens)}$$

$$= \int_1^9 x^2 \times \frac{9}{8x^2}\ \mathrm{d}x - \left(\frac{9\ln 3}{4}\right)^2$$

$$= \int_1^9 \frac{9}{8}\ \mathrm{d}x - \left(\frac{9\ln 3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{9}{8} \times (9-1) - \left(\frac{9\ln 3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{9}{8} \times 8 - \left(\frac{9\ln 3}{4}\right)^2$$

$$= 9 - \left(\frac{9\ln 3}{4}\right)^2$$