1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 29 mars 2016 (50 minutes)

Prénom : ……………………………..…… **Nom :** ……………………………...……

Note : …. / 20

I. (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -2$ et telle que, chaque terme sauf le premier, est égal à la somme de l'opposé du terme précédent et de 2.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ……………………………….. (une seule égalité)

II. (2 points)

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.

La variable *n* est un entier naturel avec $n \geqslant 1$. La variable *u* est un réel.

Cet algorithme permet de définir une suite (u_n) de la manière suivante : u_n désigne la valeur de *u* affichée en sortie pour un entier naturel *n* saisi en entrée. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$.

Exprimer u_n en fonction de *n*.

Entrée :
Saisir *n*

Traitement :
Si *n* est pair
  Alors *u* prend la valeur $\sqrt{n+1}$
  Sinon *u* prend la valeur $\sqrt{n-1}$
FinSi

Sortie :
Afficher *u*

$\forall n \in \mathbb{N}$ ……………………………….. (une seule égalité)

III. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et telle que pour tout entier naturel *n*,

$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1$.

Calculer u_1 et u_2 « à la main ».

………

………

………

………

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n + 3}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x+3}$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

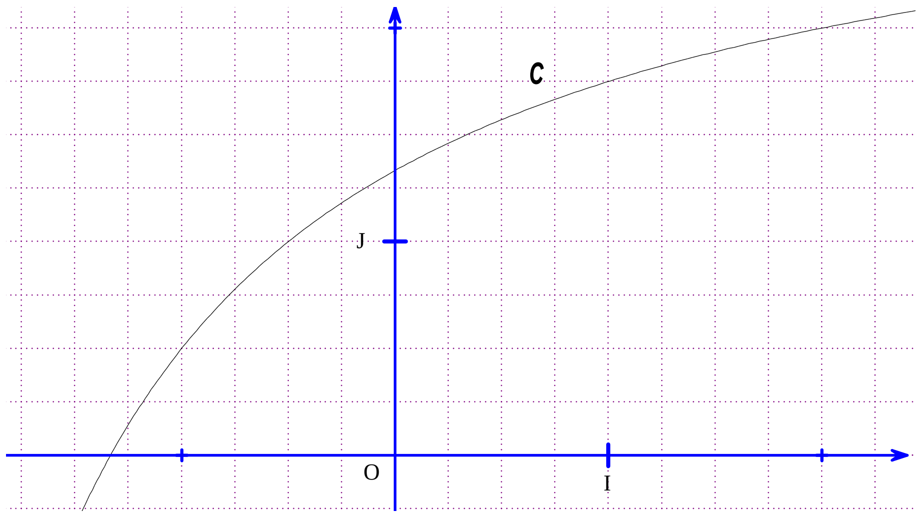
Les graphiques 1 et 2 donnés sur la feuille annexe montrent le début de la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

Sur le graphique ci-dessous :
- reproduire la construction donnée sur le graphique 2 ;
- poursuivre avec soin et précision sur le graphique ci-dessous la construction jusqu'à u_4.

Laisser les traits et éléments de construction apparents.

On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2…

On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.



2°) À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n). On répondra en une phrase en employant l'un des deux modèles de rédaction suivants (les deux phrases ont la même signification). On ne demande pas de justifier.

- « D'après le graphique, il semble que la suite (u_n) soit … . »
- « Grâce au graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) soit … . ».

………

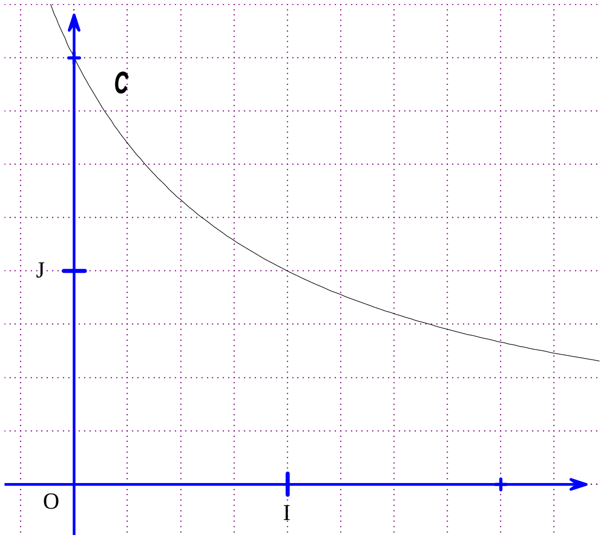
………

V. (3 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel *n*.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

Effectuer avec soin et précision la construction en « escargot » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_4 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).



VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Depuis le 1er janvier 2016, une commune dispose de vélos en libre service. Une société est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos. La commune disposait de 200 vélos au 1er janvier 2016.

La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service. On modélise cette situation par une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $2016 + n$.

Ainsi $u_0 = 200$ puisqu'il y avait 200 vélos en libre service au 1er janvier 2016.

On notera que dans ce modèle u_n n'est pas forcément un entier.

1°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} (*n* entier naturel strictement supérieur à 1). Répondre sans justifier.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ………………………………………………………. (une seule égalité)

2°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence établie à la question précédente. On admet que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

Déterminer la première année durant laquelle le nombre de vélos de la commune dépassera 250.

……………………….. (répondre sans faire de phrase)

3°) La société facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1er janvier. Déterminer le coût total pour la période du 1er janvier 2016 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite (u_n) étant exprimé avec un nombre entier (c'est-à-dire arrondi à l'unité).

……………………….. (une seule réponse)

VII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et telle que pour tout entier naturel *n*,

$u_{n+1} = \dfrac{1-(u_n)^2}{3}$.

1°) Quelle est la valeur exacte de u_3 ?

………………………………………………………. (une seule égalité)

2°) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel *n* donné, tous les termes de la suite, de l'indice 0 à l'indice *n*.

Parmi les trois algorithmes donnés sur la feuille annexe, un seul convient. Préciser lequel sans justifier la réponse.

……………………………………………… (une seule réponse)

VIII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de mots de longueur *n* que l'on peut former à partir de l'alphabet $E = \{0\,;1\,;2\}$ et qui ne contiennent pas deux « 0 » voisins.

Par exemple, $[2\,;0\,;1\,;0\,;1]$ est un mot de longueur 5 que l'on peut former à partir de l'alphabet $E = \{0\,;1\,;2\}$ et qui ne contient pas deux « 0 » voisins.

On démontre aisément que $u_1 = 3$ et $u_2 = 8$ (la justification est donnée sur la feuille annexe).

On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n \quad (1)$.

1°) À l'aide la relation (1), calculer « à la main » le nombre de mots de longueur 3 que l'on peut former à partir de l'alphabet *E* et qui ne contiennent pas deux « 0 » voisins. On présentera succinctement le calcul.

………

………

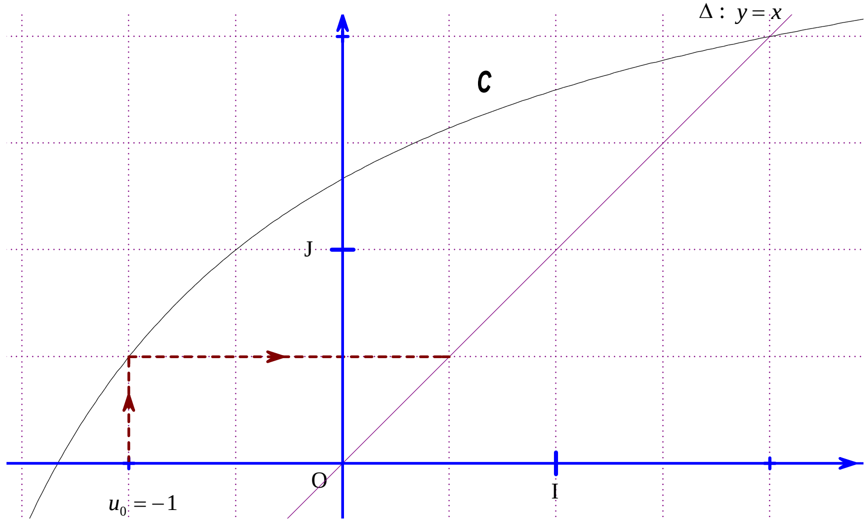
2°) En observant que la relation (1) s'écrit aussi $u_n = 2u_{n-1} + 2u_{n-2}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, « rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice et donner le nombre de mots de longueur 10 que l'on peut former à partir de l'alphabet *E* et qui ne contiennent pas deux « 0 » voisins. On remarquera que la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ c'est-à-dire à partir de l'indice 1.

………………………………….…. (un seul résultat sans égalité)

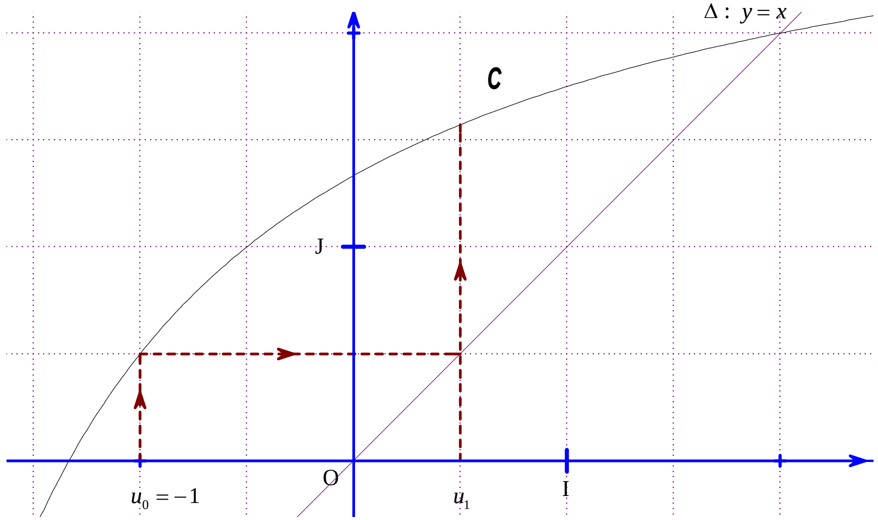
Feuille annexe à conserver

IV.

1°) Graphiques



Graphique 1 (ne rien écrire sur ce graphique)



Graphique 2 (ne rien écrire sur ce graphique)

VII.

2°)

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
Saisir n U prend la valeur – 1 **Pour** i allant de 1 à n **Faire** U prend la valeur $\frac{1-U^2}{3}$ **FinPour** Afficher U	Saisir n **Pour** i allant de 1 à n **Faire** U prend la valeur – 1 Afficher U U prend la valeur $\frac{1-U^2}{3}$ **FinPour**	Saisir n U prend la valeur – 1 **Pour** i allant de 1 à n **Faire** Afficher U U prend la valeur $\frac{1-U^2}{3}$ **FinPour** Afficher U

VIII.

$u_1 = 3$ car les mots de longueur 1 que l'on peut former à partir de l'alphabet E et qui ne contiennent pas deux « 0 » voisins sont $[0]$, $[1]$, $[2]$.

$u_2 = 8$ car les mots de longueur 2 que l'on peut former à partir de l'alphabet E et qui ne contiennent pas deux « 0 » voisins sont $[0\,;1]$, $[0\,;2]$, $[1\,;0]$, $[1\,;1]$, $[1\,;2]$, $[2\,;0]$, $[2\,;1]$, $[2\,;2]$.

Corrigé du contrôle du 29-3-2016

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -2$ et telle que, chaque terme sauf le premier, est égal à la somme de l'opposé du terme précédent et de 2.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -u_n + 2 \text{ (une seule égalité)}$$

Il s'agit de comprendre et de traduire la phrase sous la forme d'une relation de récurrence.

II.

On considère l'algorithme ci-contre rédigé en langage naturel.
La variable n est un entier naturel avec $n \geqslant 1$. La variable u est un réel.
Cet algorithme permet de définir une suite (u_n) de la manière suivante : u_n désigne la valeur de u affichée en sortie pour un entier naturel n saisi en entrée. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$.
Exprimer u_n en fonction de n.

Entrée :
Saisir n

Traitement :
Si n est pair
  Alors u prend la valeur $\sqrt{n+1}$
  Sinon u prend la valeur $\sqrt{n-1}$
FinSi

Sortie :
Afficher u

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{n + (-1)^n} \text{ (une seule égalité)}$$

Il fallait réfléchir un peu.
– 1 élevé à un exposant pair donne 1 et – 1 élevé à un exposant impair donne – 1.

III.

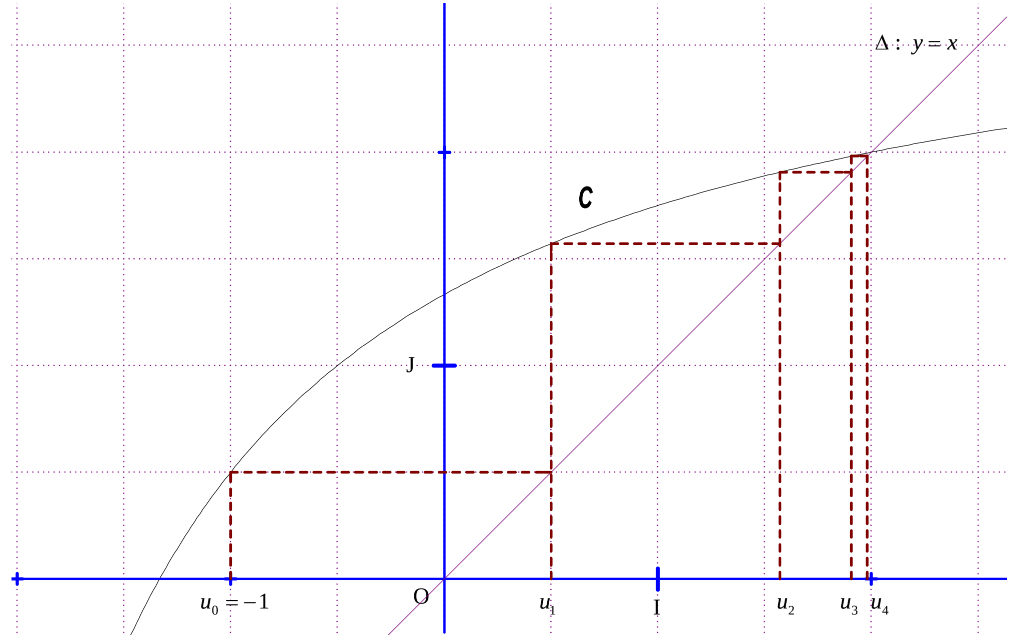
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1$.
Calculer u_1 et u_2 « à la main ».

$u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 1$	$u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 1$
$u_1 = 3 \times 2 + 1$	$u_2 = 3 \times 7 - 1$
$u_1 = 7$	$u_2 = 20$

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n + 3}$ pour tout entier naturel n.

1°) Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x+3}$ dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \text{I}, \text{J})$.
Les graphiques 1 et 2 donnés sur la feuille annexe montrent le début de la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).
Sur le graphique ci-dessous :
- reproduire la construction donnée sur le graphique 2 ;
- poursuivre avec soin et précision sur le graphique ci-dessous la construction jusqu'à u_4.
Laisser les traits et éléments de construction apparents.
On n'écrira aucune valeur sur l'axe des abscisses sauf éventuellement celle de u_0. On écrira juste u_0, u_1, u_2…
On n'écrira rien sur l'axe des ordonnées.



On vérifie la construction sur la calculatrice graphique.

2°) À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n). On répondra en une phrase en employant l'un des deux modèles de rédaction suivants (les deux phrases ont la même signification). On ne demande pas de justifier.

- « D'après le graphique, il semble que la suite (u_n) soit … . »
- « Grâce au graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) soit … . ».

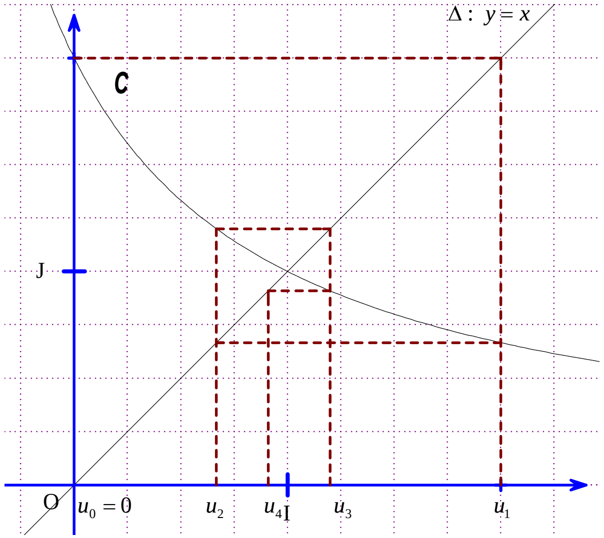
D'après le graphique, il semble que la suite (u_n) soit croissante.

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$ pour tout entier naturel *n*.

Sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$ dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \text{I}, \text{J})$.

Effectuer avec soin et précision la construction en « escargot » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_4 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).



On vérifie la construction sur la calculatrice graphique.

VI.

Depuis le 1er janvier 2016, une commune dispose de vélos en libre service. Une société est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos. La commune disposait de 200 vélos au 1er janvier 2016.

La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service. On modélise cette situation par une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $2016 + n$.

Ainsi $u_0 = 200$ puisqu'il y avait 200 vélos en libre service au 1er janvier 2016.

On notera que dans ce modèle u_n n'est pas forcément un entier.

1°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} (*n* entier naturel strictement supérieur à 1). Répondre sans justifier.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 0{,}85u_{n-1} + 42 \quad \text{(une seule égalité)}$$

2°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence établie à la question précédente. On admet que la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

Déterminer la première année durant laquelle le nombre de vélos de la commune dépassera 250.

2023 (répondre sans faire de phrase)

1ère méthode : On utilise la commande « rép » de la calculatrice. *Ce n'est pas la méthode de l'énoncé.*

2e méthode : On utilise le mode suite de la calculatrice. *C'est la méthode de l'énoncé.*

$\boxed{\text{mode}} \rightarrow$ suite $\rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow 0.85 \rightarrow \boxed{\text{2nde}} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow (n-1) \rightarrow \boxed{+} \rightarrow 42$

$n\text{Min} = 0$
$\text{u}(n) = 0.85\text{u}(n-1) + 42$
$\text{u}(n\text{Min}) = \{200\}$

Les accolades se mettent toutes seules.

Pour $n-1$, on utilise le « grand » – (et non le « petit » –).

Sur certaines calculatrice, on a deux lignes : une ligne avec $\text{u}(0)$ et une ligne avec $\text{u}(1)$.

On complète uniquement la ligne avec $\text{u}(0)$ [on écrit $\text{u}(0) = 200$]. On ne complète pas la ligne avec $\text{u}(1)$ [on n'écrit pas $\text{u}(1) = 212$ qui imposerait d'avoir fait un calcul].

On obtient l'extrait suivant du tableau de valeurs :

n	$u(n)$ (affichage de la calculatrice)
6	249,82803875
7	254,3538329375

Ainsi, $u_6 = 249,8280387...$ et $u_6 = 254,353832937...$.

Le nombre de vélos de la commune dépassera donc 250 pour l'année $2016+7=2023$.

N.-B. : Le tableau de valeurs de la calculatrice permet d'observer que le nombre de vélos croît au fil des années ce qui est cohérent avec le résultat que nous demande d'admettre la calculatrice.

3°) La société facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1^er^ janvier. Déterminer le coût total pour la période du 1^er^ janvier 2016 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite (u_n) étant exprimé avec un nombre entier (c'est-à-dire arrondi à l'unité).

259 500 € (une seule réponse)

Année	**Terme de la suite**	**Valeur exacte**	**Valeur arrondie à l'unité**
2016	u_0	200	200
2017	u_1	212	212
2018	u_2	222,2	222
2019	u_3	230,87	231

On calcule la somme $200+212+222+231=865$ et l'on multiplie le résultat par 300.

VII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et telle que pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \dfrac{1-(u_n)^2}{3}$.

1°) Quelle est la valeur exacte de u_3 ?

$u_3 = \dfrac{8}{27}$ (une seule égalité)

2°) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel *n* donné, tous les termes de la suite, de l'indice 0 à l'indice *n*.
Parmi les trois algorithmes donnés sur la feuille annexe, un seul convient. Préciser lequel sans justifier la réponse.

Algorithme 3 (une seule réponse)

L'algorithme 1 affiche seulement la valeur de u_n pour le *n* particulier demandé. Or on veut afficher toutes les valeurs de la suite (u_n) jusqu'au *n* choisi.

C'est donc l'algorithme 3 qu'il faut utiliser puisqu'il affiche toutes les valeurs prises par la suite de u_0 à u_{n-1} (pour la boucle de 1 à *n*) ainsi que la valeur de u_n.

VIII.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de mots de longueur *n* que l'on peut former à partir de l'alphabet $E = \{0\,;1\,;2\}$ et qui ne contiennent pas deux « 0 » voisins.
Par exemple, $[2\,;0\,;1\,;0\,;1]$ est un mot de longueur 5 que l'on peut former à partir de l'alphabet $E = \{0\,;1\,;2\}$ et qui ne contient pas deux « 0 » voisins.
On démontre aisément que $u_1 = 3$ et $u_2 = 8$ (la justification est donnée sur la feuille annexe).
On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n \quad (1)$.

1°) À l'aide la relation (1), calculer « à la main » le nombre de mots de longueur 3 que l'on peut former à partir de l'alphabet *E* et qui ne contiennent pas deux « 0 » voisins. On présentera succinctement le calcul.

$$\begin{aligned} u_3 &= 2\times 8 + 2\times 3 \\ &= 22 \end{aligned}$$

2°) En observant que la relation (1) s'écrit aussi $u_n = 2u_{n-1} + 2u_{n-2}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, « rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice et donner le nombre de mots de longueur 10 que l'on peut former à partir de l'alphabet *E* et qui ne contiennent pas deux « 0 » voisins. On remarquera que la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ c'est-à-dire à partir de l'indice 1.

24 960 (un seul résultat sans égalité)

Sur la calculatrice, on « rentre » la suite de la manière suivante.

• Calculatrice TI 83 Premium non mise à jour :

$n\text{Min} = 1$
$\text{u}(n) = 2\text{u}(n-1) + 2\text{u}(n-2)$
$\text{u}(n\text{Min}) = \{8, 3\}$

On rentre d'abord la valeur de u_1 (c'est-à-dire 8) puis la valeur de u_0 (c'est-à-dire 3).

Les accolades se mettent toutes seules.

Pour $n-1$ et $n-2$, on utilise le « grand » – (et non le « petit » –).

• Calculatrice TI 83 Premium mise à jour :

$n\text{Min} = 1$
$\text{u}(n) = 2\text{u}(n-1) + 2\text{u}(n-2)$
$\text{u}(1) = 3$
$\text{u}(2) = 8$

Beaucoup d'élèves n'ont pas réussi à « rentrer » la suite pendant le contrôle. Du coup, ils ont fait les calculs « à la main », avec l'aide de la calculatrice.

Il y a eu des erreurs pour l'utilisation du bon signe –.

Il y a eu aussi des erreurs par des élèves qui n'ont pas compris que pour $\mathrm{u}(n\mathrm{Min})$, il faut rentrer les valeurs des deux premiers termes.

Une élève m'a signalé qu'il faut aussi modifier le format. Il faut choisir $\mathrm{f}(n)$ et non Esc.