TS1 et TS2 spécialité

Contrôle du mardi 29 mars 2016 (50 minutes)

Prénom : …………………… **Nom : ………………………………**

Note : …. / 20

I. (4 points : 1°) 0 point ; 2°) 2 points ; 2 points)

On pose $\mathrm{N}=12\ 345\ 678\ 987\ 654\ 321$. On admet que $\mathrm{N}=111\ 111\ 111^2$.

1°) Calculer $1\ 001\ 001\times 111$.

……………………………………….. (un seul résultat sans égalité)

2°) Décomposer N en produit de facteurs premiers sachant que 333 667 est un nombre premier.

………

………

………

………

3°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de N.

………

………

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) a) 2 points ; b) 2 points)

1°) Soit p un nombre premier et a un entier relatif quelconque.
Préciser $\mathrm{PGCD}(a,\ p)$. Donner le résultat directement sans faire la démonstration. Toute réponse erronée ou approximative ne sera pas prise en compte.

………

………

2°) Pour tout entier relatif n, on pose $a=3n+2$ et $b=n-5$.
a) Démontrer que $\mathrm{PGCD}(a,b)=\mathrm{PGCD}(b,17)$.

………

………

b) À l'aide du résultat de la question 1°), donner la valeur du PGCD de a et b suivant les valeurs de n.

………

………

………

………

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $a=2^{2n}\times 3^{n+2}\times 5$ et $b=3\times 42^n$.

1°) Exprimer le PGCD et le PPCM de a et de b sous la forme d'un produit de nombres premiers avec des exposants en fonction de n. Aucune justification n'est demandée.

………

………

………

………

2°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs communs à a et b.

………

………

………

………

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On pose $N = 999\ 999\ 999\ 991$.
En observant que l'on a $N = 10^{12} - 9$, dire si le nombre N est premier.

………

………

………

………

………

………

2°) On note N' le nombre entier dont l'écriture en base 10 est formée de 330 chiffres tous égaux à 9.
Démontrer que N' est divisible par 331.
On rappelle l'énoncé du petit théorème de Fermat :

> Soit *p* est un nombre premier.
> Pour tout entier relatif *a* non divisible par *p*, on a : $a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } p)$.

………

………

………

………

………

………

………

………

V. (3 points : 2 points + 1 point)

Seul un de ces nombres est la somme de trois nombres premiers (distincts ou non) compris entre 5 et 80. Lequel ?

$A = 199$ $B = 208$ $C = 224$ $D = 246$ $E = 283$

Entourer le nombre choisi et justifier ci-dessous ce choix en quelques lignes.

………

………

………

………

………

………

Écrire le nombre choisi comme somme de trois nombres premiers.

………

Corrigé du contrôle du 29-3-2016

I.

On pose $N = 12\,345\,678\,987\,654\,321$. On admet que $N = 111\,111\,111^2$.

1°) Calculer $1\,001\,001 \times 111$.

111 111 111 (un seul résultat sans égalité)

2°) Décomposer N en produit de facteurs premiers sachant que 333 667 est un nombre premier.

On a : $1\,001\,001 = 3 \times 333\,667$ et $111 = 3 \times 37$.

Par suite, $N = 3^4 \times 37^2 \times 333\,667^2$.

3°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de N.

Le nombre de diviseurs positifs de N est $(4+1)\times(2+1)\times(2+1) = 45$.

On utilise la formule du cours $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_r+1)$.

II.

1°) Soit *p* un nombre premier et *a* un entier relatif quelconque.
Préciser $\text{PGCD}(a, p)$. Donner le résultat directement sans faire la démonstration. Toute réponse erronée ou approximative ne sera pas prise en compte.

Si $p \mid a$, alors $\text{PGCD}(a, p) = p$.

Si $p \nmid a$, alors $\text{PGCD}(a, p) = 1$.

2°) Pour tout entier relatif *n*, on pose $a = 3n+2$ et $b = n-5$.
a) Démontrer que $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, 17)$.

On a : $3n+2 = 3(n-5)+17$ soit $a = 3b+17$ (égalité qui ne fait intervenir que des entiers).

Donc d'après le lemme d'Euclide, $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, 17)$.

b) À l'aide du résultat de la question 1°), donner la valeur du PGCD de *a* et *b* suivant les valeurs de *n*.

On utilise le résultat du 1°) en discutant suivant que 17 divise *b* ou non.

$17 \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ n-5 = 17k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ n = 5+17k$

1^er^ cas : *n* est de la forme $5+17k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Dans ce cas, $17 \mid b$ d'où $\text{PGCD}(a, b) = 17$.

2^e^ cas : *n* n'est pas de la forme $5+17k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Dans ce cas, $17 \nmid b$ d'où $\text{PGCD}(a, b) = 1$.

On peut aussi distinguer les cas en utilisant des congruences.

III.

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $a = 2^{2n} \times 3^{n+2} \times 5$ et $b = 3 \times 42^n$.

1°) Exprimer le PGCD et le PPCM de *a* et de *b* sous la forme d'un produit de nombres premiers avec des exposants en fonction de *n*. Aucune justification n'est demandée.

On commence par déterminer la décomposition en facteurs premiers de *b*.

$b = 3 \times (2 \times 3 \times 7)^n$

$= 2^n \times 3^{n+1} \times 7^n$

Pour le PGCD on prend les diviseurs premiers communs à *a* et *b* puis on leur affecte le plus petit exposant avec lequel ils apparaissent dans les décompositions.
Les facteurs premiers communs sont 2 et 3.
Le nombre 2 apparaît :
dans la décomposition de *a* avec l'exposant 2*n* ;
dans la décomposition de *b* avec l'exposant *n*.

Le nombre 3 apparaît :
dans la décomposition de *a* avec l'exposant $n+2$;
dans la décomposition de *b* avec l'exposant $n+1$.

C'est le contraire pour le PPCM. On prend tous les diviseurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions puis on leur affecte le plus grand exposant avec lequel ils apparaissent dans les décompositions de *a* et *b*.

$\text{PGCD}(a, b) = 2^n \times 3^{n+1}$

$\text{PPCM}(a, b) = 2^{2n} \times 3^{n+2} \times 5 \times 7^n$

2°) Déterminer le nombre de diviseurs positifs communs à *a* et *b*.

Le nombre de diviseurs positifs communs à *a* et *b* est égal au nombre de diviseurs positifs du PGCD de *a* et *b*.

Il est égal à $(n+1)(n+1+1) = (n+1)(n+2)$.

Il n'est pas du tout utile de développer.

IV.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) On pose $N = 999\,999\,999\,991$.
En observant que l'on a $N = 10^{12} - 9$, dire si le nombre N est premier.

Grâce à l'indication de l'énoncé, on peut factoriser l'écriture de N.

$$N = 10^{12} - 9 = \left(10^6\right)^2 - 3^2 = \left(10^6 - 3\right)\left(10^6 + 3\right)$$

On a pu écrire N comme produit de deux entiers strictement supérieurs à 1 donc N n'est pas premier.

2°) On note N' le nombre entier dont l'écriture en base 10 est formée de 330 chiffres tous égaux à 9.
Démontrer que N' est divisible par 331.
On rappelle l'énoncé du petit théorème de Fermat :

> Soit *p* est un nombre premier.
> Pour tout entier relatif *a* non divisible par *p*, on a : $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On peut écrire : $N' = 10^{330} - 1$.

On vérifie que 331 est un nombre premier.

$331 \nmid 10$ donc d'après le petite théorème de Fermat, $10^{331-1} \equiv 1$ (mod. 331) soit $10^{330} - 1 \equiv 0$ (mod. 331) d'où $N' \equiv 0$ (mod. 331).

N' est donc divisible par 331.

V.

Seul un de ces nombres est la somme de trois nombres premiers (distincts ou non) compris entre 5 et 80. Lequel ?

$\boxed{A = 199}$ $B = 208$ $C = 224$ $D = 246$ $E = 283$

Entourer le nombre choisi et justifier ci-dessous ce choix en quelques lignes.

On raisonne en cherchant des conditions nécessaires qui permettent d'éliminer certaines réponses.

La somme de ces trois nombres ne peut pas excéder 240 car ils sont les trois inférieurs à 80 et que $3 \times 80 = 240$. On élimine alors les nombres D et E. De plus les nombres premiers sont tous impairs (à l'exception de 2), donc ici, la somme des trois nombres premiers impairs est impaire, et ce n'est pas le cas des nombres B et D.

Écrire le nombre choisi comme somme de trois nombres premiers.

En tâtonnant, on trouve l'une des décompositions suivantes :

$199 = 61 + 67 + 71$

$199 = 61 + 59 + 79$

$199 = 67 + 59 + 73$

$199 = 79 + 79 + 41$

$199 = 73 + 73 + 53$

$199 = 79 + 73 + 47$

On peut vérifier que ce sont les seuls en concevant grâce au programme sur calculatrice suivant (donné par Théo Manfredi le 30-3-2016).

: {41,43,47,53,59,61,67,71,73,79} $\rightarrow$ L1 (Il est inutile de mettre des valeurs supérieures à 41 car $79 + 79 + 41 = 199$)
: For(X,1,10) (Les boucles pour vont jusqu'à 10 car la liste L1 n'a que 10 valeurs)
: For(Y,1,10)
: For(Z,1,10)
: If $L1(X) + L1(Y) + L1(Z) = 199$ and $X \leqslant Y$ and $Y \leqslant Z$
: Then
: Disp L1(X), L1(Y), L1(Z)
: Disp «----------------» (Il est important de ne pas mettre plus de 16 «-» car sinon ils sortent de l'affichage de la calculatrice.)
: Pause (La pause ici sert à laisser le temps de noter le résultat)
: End
: End
: End
: End