1ère S1

Contrôle du mardi 22 mars 2016 (50 minutes)

Prénom : ……………………………..…… **Nom :** ……………………………...…… **Note : …. / 20**

Dans les exercices **I** à **IV**, une unité de longueur est fixée dans le plan *P*.

I. (4 points : 2 points + 2 points)

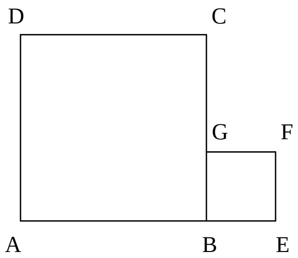
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=2$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-8$.
Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois, calculs au brouillon) :

$(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(3\vec{u}-\vec{v})=$ ………….

$\left(\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}\right)^2=$ ………….

II. (4 points : 1°) 1 points ; 2°) 3 points)

On considère la figure ci-dessous où ABCD et BEFG sont deux carrés de côtés respectifs *a* et *b* (*a* et *b* étant deux réels strictement positifs).



(il est demandé de ne rien écrire sur la figure)

Le but de l'exercice est d'exprimer le produit scalaire $p=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{ED}$ en fonction de *a* et *b*.

1°) En observant que l'on peut écrire $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles), écrire *p* comme somme de quatre produits scalaires.

$p=$ ……………………………………………………………………………………………

(écrire très lisiblement et sans rature)

2°) Achever le calcul de *p*. On rédigera les explications utiles.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

Soit ABC un triangle tel que $AB=2$, $AC=1$ et $\widehat{BAC}=60°$. On note G le point défini par $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
Calculer AG^2 ; en déduire AG.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

IV. (6 points : 3 points + 3 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note I le milieu de $[\mathrm{BC}]$.

On considère les ensembles E_1 et E_2 ainsi définis :

$E_1 = \left\{ \mathrm{M} \in P \;/\; \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \right) = 0 \right\}$; $E_2 = \left\{ \mathrm{M} \in P \;/\; \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MC}} \right\}$.

Compléter par des produits scalaires les lignes des cadres suivants.

Formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$\mathrm{M} \in E_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} \right) = 0$

$\Leftrightarrow$ ………………………..…………………..

$\Leftrightarrow$ ………………………..…………………..

$\Leftrightarrow$ ………………………..…………………..

L'ensemble E_1 est …………………………..……………………………………………….

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$\mathrm{M} \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MC}}$

$\Leftrightarrow$ ………………………..…………………..

$\Leftrightarrow$ ………………………..…………………..

$\Leftrightarrow$ ………………………..…………………..

L'ensemble E_2 est …………………………..……………………………………………….

V. (4 points 1°) 0 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point + 1 point)

Un jeu consiste à lancer 200 fois une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à $\frac{1}{3}$. À chaque lancer, si la pièce tombe sur pile, on gagne 3 points ; si la pièce tombe sur face, on perd 4 points. On note X le nombre de piles obtenus à l'issue des 200 lancers et G le nombre total de points.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision.

X suit la loi ……………………………………………………………………………………………………..

2°) Exprimer G en fonction de X.

G = …………………................... (un seul résultat sous forme réduite)

3°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de G.

$\mathrm{E}(\mathrm{G}) =$ ……………..

$\mathrm{V}(\mathrm{G}) =$ ……………..

Bonus (1 point) :

On reprend les notations de l'exercice **II**.

Exprimer le produit scalaire $p' = \overrightarrow{\mathrm{AF}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{GE}}$ en fonction de *a* et *b*.

Corrigé du contrôle du 22-3-2016

Dans les exercices **I** à **IV**, une unité de longueur est fixée dans le plan *P*.

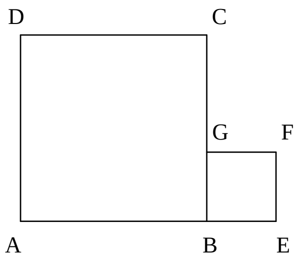
I.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$.
Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois, calculs au brouillon) :

$\left(\vec{u} + 2\vec{v}\right) \cdot \left(3\vec{u} - \vec{v}\right) = 27$ $\qquad$ $\left(\vec{u} - \dfrac{1}{2}\vec{v}\right)^2 = 34$

II.

On considère la figure ci-dessous où ABCD et BEFG sont deux carrés de côtés respectifs *a* et *b* (*a* et *b* étant deux réels strictement positifs).



(il est demandé de ne rien écrire sur la figure)

Le but de l'exercice est d'exprimer le produit scalaire $p = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ED}$ en fonction de *a* et *b*.

1°) En observant que l'on peut écrire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles), écrire *p* comme somme de quatre produits scalaires.

$p = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}\right)$

$p = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

2°) Achever le calcul de *p*. On rédigera les explications utiles.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EA} = 0$.

Donc $p = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

D'où $p = -\,\text{AB} \times \text{EA} + \text{BC} \times \text{AD}$
car :
les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont colinéaires de sens contraires ;
les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de même sens.

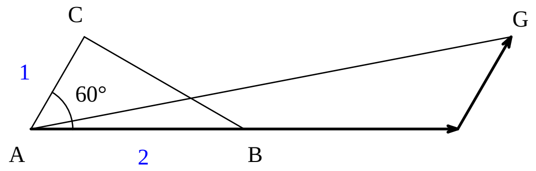
$p = -a(a+b) + a \times a$
$p = -a^2 - ab + a^2$
$p = -ab$

III.

Soit ABC un triangle tel que $\text{AB} = 2$, $\text{AC} = 1$ et $\widehat{\text{BAC}} = 60°$. On note G le point défini par $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Calculer AG^2 ; en déduire AG.

$$\begin{aligned}
\text{AG}^2 &= \overrightarrow{AG}^2 \\
&= \left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\
&= 4\overrightarrow{AB}^2 + 4\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= 4 \times 4 + 4 \times 2 \times 1 \times \cos 60° + 1 \\
&= 16 + 8 \times \frac{1}{2} + 1 \\
&= 21
\end{aligned}$$

On en déduit que $\text{AG} = \sqrt{21}$ (car une longueur est toujours positive ou nulle).



IV.

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note I le milieu de $[\text{BC}]$.
On considère les ensembles E_1 et E_2 ainsi définis :
$E_1 = \left\{ \text{M} \in P \;/\; \overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \right\}$; $E_2 = \left\{ \text{M} \in P \;/\; \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \right\}$.
Compléter par des produits scalaires les lignes des cadres suivants.
Formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$$\mathrm{M} \in E_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MI}} = 0$$

L'ensemble E_1 est le cercle de diamètre $[\mathrm{AI}]$.

Soit M un point quelconque du plan *P*.

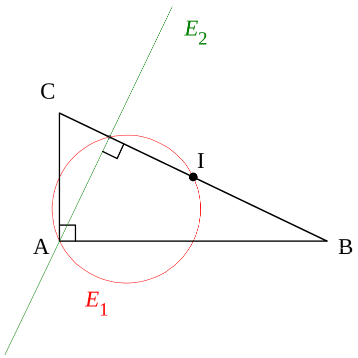
$$\mathrm{M} \in E_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MC}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$$

L'ensemble E_2 est la perpendiculaire à (BC) passant par A.



V.

Un jeu consiste à lancer 200 fois une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à $\frac{1}{3}$. À chaque lancer, si la pièce tombe sur pile, on gagne 3 points ; si la pièce tombe sur face, on perd 4 points. On note X le nombre de piles obtenus à l'issue des 200 lancers et G le nombre total de points.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = \frac{1}{3}$.

2°) Exprimer G en fonction de X.

$\mathrm{G} = 7\mathrm{X} - 800$ (un seul résultat sous forme réduite)

$$\mathrm{G} = 3 \times \mathrm{X} - 4(200 - \mathrm{X})$$

$$= 7\mathrm{X} - 800$$

3°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de G.

$$\mathrm{E}(\mathrm{G}) = -\frac{1000}{3} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{G}) = \frac{19600}{9}$$

• Attention, G ne suit pas la loi binomiale. Seule X suit une loi binomiale.
On ne peut donc pas calculer l'espérance et la variance de G en utilisant les formules du cours sur l'espérance et la variance d'une variable qui suit une loi binomiale.

• On utilise les formules données par une propriété du cours sur les variables aléatoires :
$\mathrm{E}(a\mathrm{X} + b) = a \times \mathrm{E}(\mathrm{X}) + b$ et $\mathrm{V}(a\mathrm{X} + b) = a^2 \times \mathrm{V}(\mathrm{X})$.

• On utilise les formules donnant l'espérance et la variance d'une variable qui suit une loi binomiale.

$$\mathrm{E}(\mathrm{G}) = 7 \times \mathrm{E}(\mathrm{X}) - 800$$
$$= 7 \times 200 \times \frac{1}{3} - 800$$
$$= -\frac{1000}{3}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{G}) = 7^2 \times \mathrm{V}(\mathrm{X})$$
$$= 49 \times 200 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$$
$$= \frac{19600}{9}$$

Bonus (1 point) :

Exprimer le produit scalaire $p' = \overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{GE}$ en fonction de a et b.

$$p' = \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}\right) \bullet \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE}\right)$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{GB}}_{0} + \overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{GB} + \underbrace{\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{BE}}_{0} \quad \text{(vecteurs orthogonaux)}$$

$$= \overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{GB}$$

$$= (a+b) \times b - b \times b \quad \text{(utilisation de la colinéarité)}$$

$$= ab + b^2 - b^2$$

$$= ab$$