Détermination de primitives de la forme $x \mapsto \cos^p x \times \sin^q x$ où p et q sont deux entiers naturels

Il y a deux cas qui débouchent sur deux méthodes différentes.

I. Quand l'un des deux exposants est impair

1°) Exemple 1

$f : x \mapsto \cos^5 x$

Méthode : On effectue la réécriture suivante de $f(x)$ consistant à isoler un $\cos x$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x \times \cos^4 x \\
&= \cos x \times \left(\cos^2 x\right)^2 \\
&= \cos x \times \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \\
&= \cos x \times \left(1 + \sin^4 x - 2\sin^2 x\right)^2 \quad \text{(développement par identité remarquable)} \\
&= \cos x - 2\sin^2 x \cos x + \cos x \sin^4 x
\end{aligned}$$

On utilise la forme $u'u^n$.

Une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sin x - 2\dfrac{\sin^3 x}{3} + \dfrac{\sin^5 x}{5}$.

On ne peut pas aller plus loin.

2°) Exemple 2

$g : x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sin^2 x \times \cos x \times \cos^2 x \\
&= \sin^2 x \times \cos x \times \left(1 - \sin^2 x\right) \\
&= \cos x \times \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right) \\
&= \cos x \sin^2 x - \cos x \sin^4 x
\end{aligned}$$

Une primitive de g est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5}$.

II. Quand les deux exposants sont pairs

Exemple : $f : x \mapsto \cos^4 x$

Méthode : réécriture de $f(x)$ (linéarisation de $f(x)$)

On exprime $\cos^4 x$ sans puissances. Pour cela, on utilise les nombres complexes.

Rappel : Formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

On peut donc écrire

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{16} \times \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4$$

On utilise la formule du binôme de Newton (ou le triangle de Pascal).

$$\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4 = \left(e^{ix}\right)^4 + 4\left(e^{ix}\right)^3 \times e^{-ix} + 6\left(e^{ix}\right)^2 \times \left(e^{-ix}\right)^2 + 4\left(e^{-ix}\right)^3 \times e^{ix} + \left(e^{-ix}\right)^4$$

Donc :

$$\cos^4 x = \frac{1}{16} \times \left[\left(e^{ix}\right)^4 + 4\left(e^{ix}\right)^3 \times e^{-ix} + 6\left(e^{ix}\right)^2 \times \left(e^{-ix}\right)^2 + 4\left(e^{-ix}\right)^3 \times e^{ix} + \left(e^{-ix}\right)^4\right]$$

On rassemble les termes d'exponentielles faisaient intervenir le même exposant de signe opposé pour appliquer la formule d'Euler.

$$\cos^4 x = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}$$

Une primitive de *f* est la fonction *F* définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{\cos 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8}$.