Problème

Une suite de carrés

On considère la suite infinie (c_n) de carrés juxtaposés comme sur la figure (1) :
$c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4\ldots$

On a c_1 à droite de c_0, c_2 au-dessus de c_1, c_3 à gauche de c_2, c_4 en dessous de c_3 et le cycle continue indéfiniment : droite, dessus, gauche, dessous etc.
Deux carrés ainsi juxtaposés ont toujours un sommet en commun, le carré c_0 a pour côté 1, les carrés suivants ont pour côté : $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$

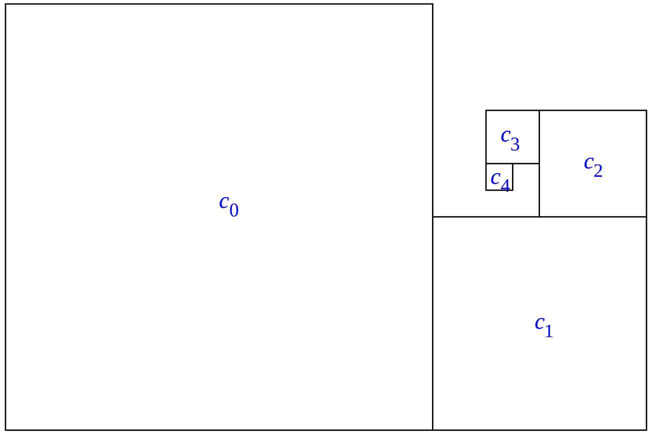

Figure (1)

Pour tout entier naturel n, on note $(x_n\,;\,y_n)$ les coordonnées du centre du carré c_n dans le repère orthonormé d'origine O dont les axes Ox et Oy sont indiqués sur la figure (2).

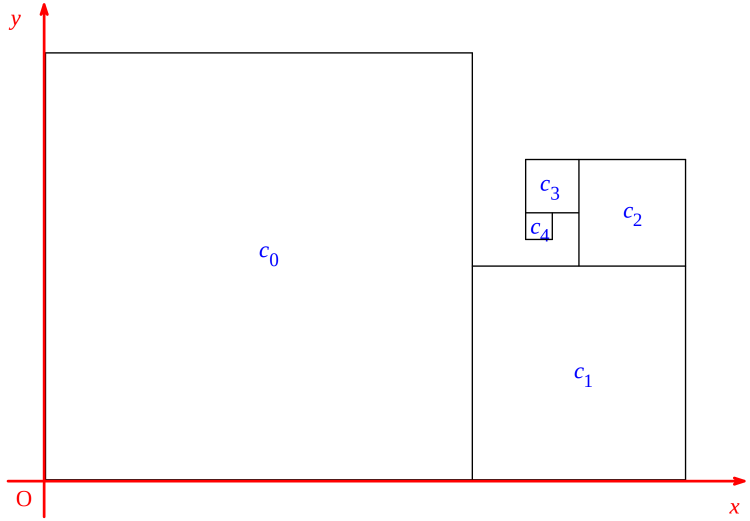

Figure (2)

1°) Démontrer les formules :

$$x_{4n+4} = x_{4n} + \frac{1}{2^{4n+1}} + \frac{1}{2^{4n+3}} + \frac{1}{2^{4n+5}}$$
$$x_{4n+4} = x_{4n} + \frac{21}{2^{4n+5}}$$

2°) En déduire par addition qu'on a $x_{4n} = \frac{6}{5} - \frac{7}{10} \times \frac{1}{2^{4n}}$ et en déduire les expressions analogues pour x_{4n+1}, x_{4n+2} et x_{4n+3}.

3°) En déduire que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

4°) Déterminer simplement en introduisant une droite convenable que la limite de (y_n) est $\frac{3}{5}$.