FICHE SUR PGCD et PPCM

1 Définition du PGCD

Soit deux entiers relatifs non nuls *a* et *b*.
Ils ont chacun un nombre fini de diviseurs.
Comme 1 est un diviseur commun de *a* et *b*, il existe un plus grand diviseur commun aux deux entiers *a* et *b*.
On l'appelle "plus grand commun diviseur de *a* et *b* " et on le note $\mathrm{PGCD}(a,b)$. C'est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Exemple : $\mathrm{PGCD}(18, 24) = 6$

2 Nombres premiers entre eux

On dit que deux entiers relatifs *a* et *b* sont premiers entre eux si leur seul diviseur positif commun est 1 donc si $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.

3 Propriétés

a) Un nombre premier est premier avec tous les entiers relatifs qu'il ne divise pas.

b) Si *p* et *q* sont deux nombres premiers distincts, alors ils sont premiers entre eux.

4 Propriété

Deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de diviseur premier en commun dans leurs décompositions en produit de facteurs premiers.

5 Propriété

Soit deux entiers naturels *a* et *b* supérieurs ou égaux à 2

S'ils ne sont pas premiers entre eux, leur PGCD est égal au produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions (de *a* et *b*) avec pour chaque facteur premier l'exposant le plus petit de ceux qu'il a dans *a* et dans *b*.

Leur PPCM est égal au produit des facteurs premiers qui apparaissent dans chaque décomposition avec l'exposant le plus grand de ceux qu'il a dans *a* et dans *b*.

Écriture plus mathématique :

On considère deux entiers naturels *a* et *b* qui s'écrivent sous la forme : $a = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times ... \times {p_r}^{\alpha_r}$ et $b = {p_1}^{\beta_1} \times {p_2}^{\beta_2} \times ... \times {p_r}^{\beta_r}$ où :
$p_1,\ p_2, \dots,\ p_r$ désignent des nombres premiers deux à deux distincts ;
$\alpha_1,\ \alpha_2, \dots \alpha_r$ désignent des entiers naturels ; $\beta_1,\ \beta_2, \dots \beta_r$ désignent des entiers naturels.

$$\mathrm{PGCD}(a\,;b) = \prod_{i=1}^{r} {p_1}^{\min(\gamma_1, a)} \quad \text{et} \quad \mathrm{PPCM}(a\,;b) = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\min(\gamma_i, a)}$$

6 Propriété

Les diviseurs communs aux entiers *a* et *b* sont les diviseurs de leur PGCD.

7 Lemme d'Euclide

Soit quatre entiers relatifs non nuls $a \neq 0$, $b \neq 0$, q, r tels que $a = bq + r$.

Si a et *b* sont non nuls, alors $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, r)$.

8 Algorithme d'Euclide

Soit deux entiers naturels non nuls *a* et *b* tels que *b* ne divise pas *a*.
Soit *r* le reste dans la division euclidienne de *a* par *b*. On divise *b* par *r* et ainsi de suite tant que le reste n'est pas nul. Le dernier reste non nul est le PGCD de *a* et *b* et les diviseurs communs à *a* et *b* sont les diviseurs du PGCD.

Exemple :

Déterminons le PGCD de 234 et 84.

a	*b*	*r*
234	84	66
84	66	18
66	18	12
18	12	6
12	6	0

9 Propriété

a et *b* sont deux entiers relatifs.
c est un entier naturel non nul.

$\mathrm{PGCD}(ac, bc) = c\mathrm{PGCD}(a, b)$

10 Propriété

Soit deux entiers relatifs *a* et *b* et *d* un diviseur positif de *a* et *b*.

$a = da'$; $b = db'$

Alors, le PGCD de *a* et *b* est égal à *d* si et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.

11 Théorème de Bezout

Deux entiers relatifs *a* et *b* sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des entiers relatifs *u* et *v* tels que $au + bv = 1$.

$\boxed{12}$ Identité de Bézout

Soit deux entiers relatifs non nuls a et b.
Si d est le PGCD de a et b alors il existe des entiers u et v tels que $au+bv=d$.

$\boxed{12}$ Détermination de u et v

Les méthodes

● « à la main »

- en devinant (cas simples) $\longrightarrow$ solution évidente
- en remontant l'algorithme d'Euclide (méthode importante du point de vue théorique)
- nombres premiers

● avec la calculatrice

- fonction affine
- « programme Bezout »

● sur Internet (sites tout prêts)

Exemple de remontée de l'algorithme d'Euclide avec le PGCD de 234 et 84 (cf. $\boxed{7}$)

$$234=2\times 84+66$$

$$18=84-66=84-\left(234-2\times 84\right)=-234+3\times 84$$

$$12=66-3\times 18=\left(234-2\times 84\right)-3\times\left(-234+3\times 84\right)=4\times 234-11\times 84$$

$$6=18-12=\left(-234+3\times 84\right)-\left(4\times 234-11\times 84\right)=-5\times 234+14\times 84$$

a	b	r	u	v
234	84	66	1	– 2
84	66	18	– 1	3
66	18	12	4	– 11
18	12	6	– 5	14
12	6	0		

Variantes pour la méthode de remontée de l'algorithme d'Euclide

- présentation en tableau

- matrices

$\boxed{14}$ Propriété

Si un entier relatif a est premier avec les entiers relatifs b et c, alors il est premier avec leur produit bc.

$\boxed{15}$ Théorème de Gauss

Soit 3 entiers relatifs a, b, c.
Si a divise le produit bc et que a est premier avec b, alors a divise c.

$\boxed{16}$ Corollaires

a) Si un nombre premier p divise un produit ab, alors p divise a ou il divise b.

b) Soit trois entiers relatifs a, b, c.
Si a et b sont premiers entre eux et qu'ils divisent c, alors le produit ab divise c.

$\boxed{17}$ Propriété

Les multiples communs aux entiers a et b sont les multiples de leur PPCM.

$\boxed{18}$ Propriété

$$\text{PGCD}\left(a,b\right)\times\text{PPCM}\left(a,b\right)=ab$$