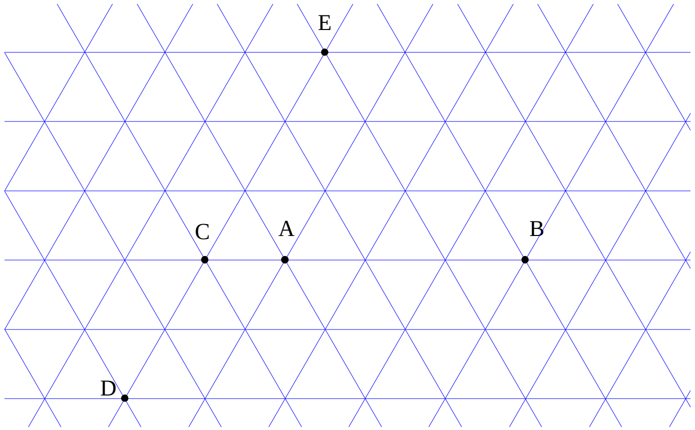
1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 8 mars 2016 (50 minutes)

Prénom : …………………………….…… **Nom :** …………………………..…… **Note : …. / 20**

I. (5 points : 1°) 4 points ; 2°) 1 point)

On considère le maillage du plan ci-dessous constitué de triangles équilatéraux ayant tous pour côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.



Ne rien écrire sur la figure.

1°) Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants.
On détaillera sur les lignes qui suivent le calcul de $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$ (en utilisant les notations géométriques adéquates).

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} =$ ……… $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE} =$ ……… $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} =$ ……… $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ………

………..

………..

………..

………..

………..

………..

2°) Déterminer, sans le calculer, le signe du produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$. Justifier en une ou deux phrases.

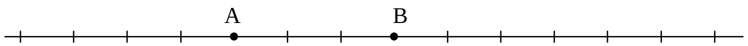
………..

………..

………..

II. (2 points)

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 3$.
Placer sans explication sur la figure ci-dessous les points E et F de la droite (AB) tels que $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AB} = -12$ et $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = 18$.



III. (1 point)

Soit E, F, G trois points du plan tels que $FE = \sqrt{6}$, $FG = 2\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} = 6$.
Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{EFG}$.

$\widehat{EFG} =$ ....

IV. (2 points)

Dans le cadre du plan de prévention du bruit, une municipalité décide d'installer des capteurs pour mesurer le niveau de bruit dans deux rues de la ville. Ces capteurs fournissent chacun 10 relevés sur une période de 24 heures. Les mesures effectuées sont en décibels (dB).

Rue 1	55	50	52	56	64	74	79	65	74	64
Rue 2	48	52	54	54	53	55	51	49	50	54

Pour chacune des deux rues, calculer le niveau moyen de bruit en dB (on note m_1 celui de la rue 1 et m_2 celui de la rue 2) et l'écart-type correspondant en dB (on note σ_1 celui de la rue 1 et σ_2 celui de la rue 2). Penser à l'unité.

$m_1 =$ .... $\sigma_1 =$ .... (valeur exacte) $\sigma_1 \approx$ .... (valeur arrondie à l'unité)

$m_2 =$ .... $\sigma_2 =$ .... (valeur exacte) $\sigma_2 \approx$ .... (valeur arrondie à l'unité)

V. (3 points)

En ville, la vitesse est limitée à 50 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Le tableau ci-dessous indique les vitesses dépassant la limite autorisée lors d'un contrôle avec un radar.

Vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Nombre de voitures	5	6	6	5	12	7	6	7	6	3

Vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Nombre de voitures	5	6	6	5	11	8	6	7	6	3

Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série statistique. Écrire l'unité à chaque fois.

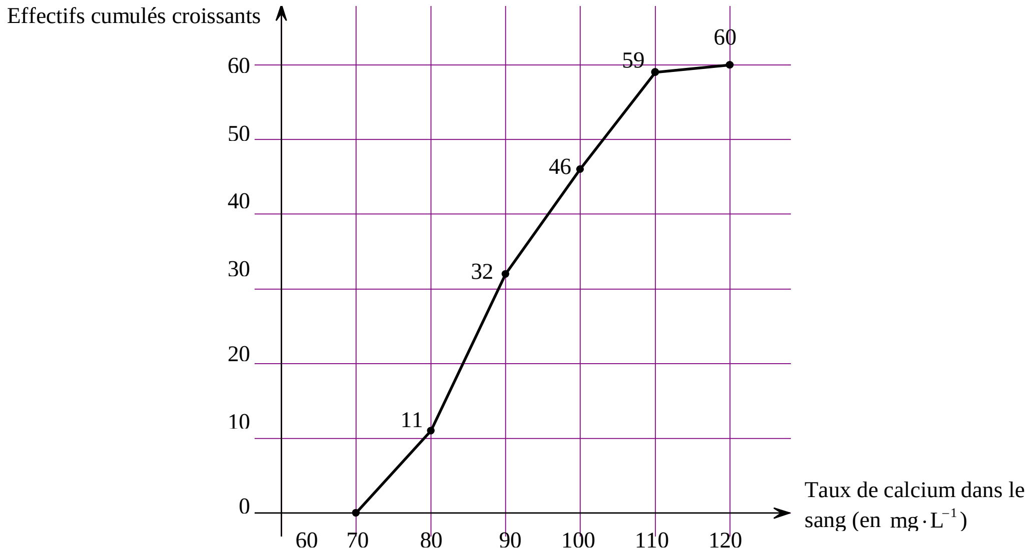
Me = ... Q_1 = ... Q_3 = ...

Calculer le pourcentage de voitures dont la vitesse lors du contrôle appartient à l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.

………………….. (un seul résultat sans égalité, arrondi au dixième)

VI. (3 points)

Le taux de calcium dans le sang doit être compris entre 95 $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et 105 $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. L'hypocalcémie est la diminution du taux de calcium dans le sang. Elle entraîne des troubles neurologiques et musculaires (fourmillements, contractures, etc.). Un patient atteint d'hypocalcémie doit faire des analyses tous les jours pendant 2 mois c'est-à-dire 60 jours consécutifs. Les résultats ont été regroupés en classes et le graphique ci-dessous est le polygone des effectifs cumulés croissants de la série. Les effectifs représentent des nombres de jours.



Déterminer graphiquement la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série statistique.
On laissera les traits de construction apparents sur le graphique. Penser à l'unité.

Me ≈ .... Q_1 ≈ .... Q_3 ≈ ....

VII. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) Un laboratoire pharmaceutique teste une nouvelle forme de comprimé d'aspirine. Il relève la masse des 1500 premiers comprimés fabriqués. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

Masse (en mg)	$[496 ; 498[$	$[498 ; 500[$	$[500 ; 502[$	$[502 ; 504[$	$[504 ; 506[$
Effectif	15	800	640	35	10

Calculer, en mg, la masse moyenne d'un comprimé. Arrondir la valeur à l'unité.

…………… (un seul résultat sans égalité)

Calculer, en mg, l'écart-type de la série. Arrondir la valeur à l'unité.

…………… (un seul résultat sans égalité)

2°) Le laboratoire décide de produire 5 milliards de comprimés d'aspirine en 2015 et prévoit d'augmenter cette production de 7 % par an (le pourcentage s'applique chaque année sur le nombre de comprimés de l'année précédente).

a) Calculer le nombre total de comprimés produits durant les années 2015 à 2018.

………………………………………… (un seul résultat sans égalité)

b) On admet que le nombre total de comprimés produits jusqu'à l'année $2015+n$ incluse ($n \in \mathbb{N}$) est donné par $\dfrac{5\times10^{11}\left(1,07^{n+1}-1\right)}{7}$.

À l'aide de cette formule, calculer le nombre le nombre total de comprimés produits jusqu'à l'année 2025 incluse. Arrondir le résultat à l'unité. Écrire le résultat sous forme « normale » et non sous forme scientifique.

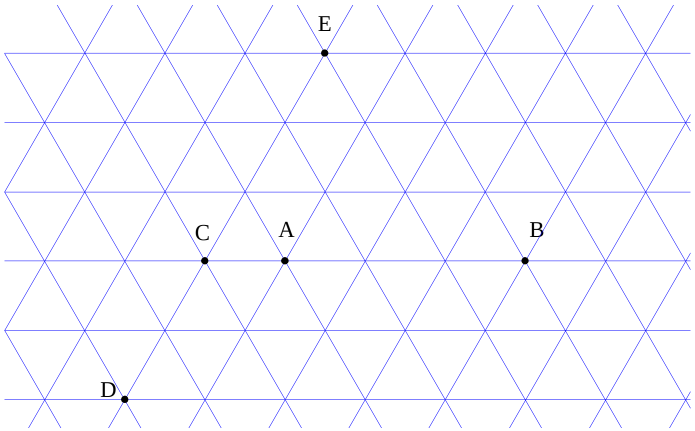
………………………………………… (un seul résultat sans égalité)

Il est demandé de ne rien écrire sur la feuille en dehors des réponses aux questions.

Corrigé du contrôle du 8-3-2016

I.

On considère le maillage du plan ci-dessous constitué de triangles équilatéraux ayant tous pour côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.



Ne rien écrire sur la figure.

1°) Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants.
On détaillera sur les lignes qui suivent le calcul de $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CE}$ (en utilisant les notations géométriques adéquates).

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{ED} = -\dfrac{15a^2}{2}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{CE} = -6a^2$ $\qquad$ $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CE} = \dfrac{3a^2}{2}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{AC} = -4a^2$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \bullet \overrightarrow{CE} &= -\text{CD} \times \text{CE} \quad \text{car } \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{CE} \text{ sont colinéaires de sens contraires}\\ &= -2a \times 3a\\ &= -6a^2\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CE}$ ont la même origine et l'angle géométrique qu'ils forment est $\widehat{ACE}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CE} &= \text{CA} \times \text{CE} \times \cos \widehat{ACE}\\ &= a \times 3a \times \cos 60°\\ &= 3a^2 \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{3a^2}{2}\end{aligned}$$

On n'utilise pas les normes car il s'agit d'une notation assez lourde. On utilise plutôt la notation de distance.

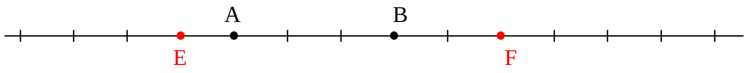
On ne met pas de parenthèses après le cos.

2°) Déterminer, sans le calculer, le signe du produit scalaire $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AE}$. Justifier en une ou deux phrases.

On observe sur la figure que l'angle $\widehat{DAE}$ est obtus.
Donc d'après la règle du signe d'un produit scalaire, $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AE} < 0$.

II.

Soit A et B deux points du plan tels que $\text{AB} = 3$.
Placer sans explication sur la figure ci-dessous les points E et F de la droite (AB) tels que $\overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{AB} = -12$ et $\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{AB} = 18$.



Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Comme $\overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{AB} < 0$, les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires. Par suite, E appartient à la demi-droite $[\text{BA})$.
De plus, $\overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{AB} = -12$ donc $\text{BE} \times \text{AB} = 12$.
Or $\text{AB} = 3$. Donc $\text{BE} = 4$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Comme $\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{AB} > 0$, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens. Par suite, F appartient à la demi-droite $[\text{AB})$.
De plus, $\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{AB} = 18$ donc $\text{EF} \times \text{AB} = 12$.
Or $\text{AB} = 3$. Donc $\text{EF} = 6$.

III.

Soit E, F, G trois points du plan tels que $\text{FE} = \sqrt{6}$, $\text{FG} = 2\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{FE} \bullet \overrightarrow{FG} = 6$.
Calculer la valeur exacte de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{EFG}$.

$$\widehat{EFG} = 45°$$

On a : $\overrightarrow{FE} \bullet \overrightarrow{FG} = \text{FE} \times \text{FG} \times \cos \widehat{EFG}$ (on évite l'écriture avec les normes).

$$\begin{aligned}\text{D'où } \cos \widehat{EFG} &= \frac{\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{EG}}{\text{EF} \times \text{EG}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{3}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{3}}\\ &= \frac{6}{6\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

On trouve $\cos \widehat{EFG} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On reconnaît une valeur remarquable du cosinus.
On peut aussi utiliser la fonction « Arccosinus » de la calculatrice.

IV.

Dans le cadre du plan de prévention du bruit, une municipalité décide d'installer des capteurs pour mesurer le niveau de bruit dans deux rues de la ville. Ces capteurs fournissent chacun 10 relevés sur une période de 24 heures. Les mesures effectuées sont en décibels (dB).

Rue 1	55	50	52	56	64	74	79	65	74	64
Rue 2	48	52	54	54	53	55	51	49	50	54

Pour chacune des deux rues, calculer le niveau moyen de bruit en dB (on note m_1 celui de la rue 1 et m_2 celui de la rue 2) et l'écart-type correspondant en dB (on note σ_1 celui de la rue 1 et σ_2 celui de la rue 2).

$m_1 = 63{,}3$ dB $\quad$ $\sigma_1 = \sqrt{90{,}61}$ (valeur exacte) $\quad$ $\sigma_1 \approx 10$ dB (valeur arrondie à l'unité)

$m_2 = 52$ dB $\quad$ $\sigma_2 = \sqrt{5{,}2}$ (valeur exacte) $\quad$ $\sigma_2 \approx 2$ dB (valeur arrondie à l'unité)

Les résultats des moyennes n'étaient pas comptés (0 point).

> Pour calculer la valeur exacte de l'écart-type, utiliser les calculs statistiques.
> La calculatrice fournit la somme des carrés des valeurs.
> On la divise par 10 (effectif total) et l'on retire la moyenne au carré.

V.

En ville, la vitesse est limitée à 50 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Le tableau ci-dessous indique les vitesses dépassant la limite autorisée lors d'un contrôle avec un radar.

Vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
Nombre de voitures	5	6	6	5	12	7	6	7	6	3

Vitesse en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Nombre de voitures	5	6	6	5	11	8	6	7	6	3

Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série statistique. Écrire l'unité à chaque fois.

$\text{Me} = 60{,}5\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ $\quad$ $Q_1 = 55\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ $\quad$ $Q_3 = 65\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

On calcule les effectifs cumulés croissants.

L'effectif total est égal à 126.

On a : $126 = 63 \times 2$ donc la médiane est égale à $\dfrac{63^{\text{e}}\text{ valeur} + 64^{\text{e}}\text{ valeur}}{2} = \dfrac{60+61}{2} = 60{,}5\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

$\dfrac{126}{4} = 31{,}5$ donc $Q_1 = 32^{\text{e}}$ valeur

$\dfrac{3\times 126}{4} = 94{,}5$ donc $Q_3 = 95^{\text{e}}$ valeur

On peut aussi utiliser la calculatrice.

Calculer le pourcentage de voitures dont la vitesse lors du contrôle appartient à l'intervalle $[Q_1\,;Q_3]$.

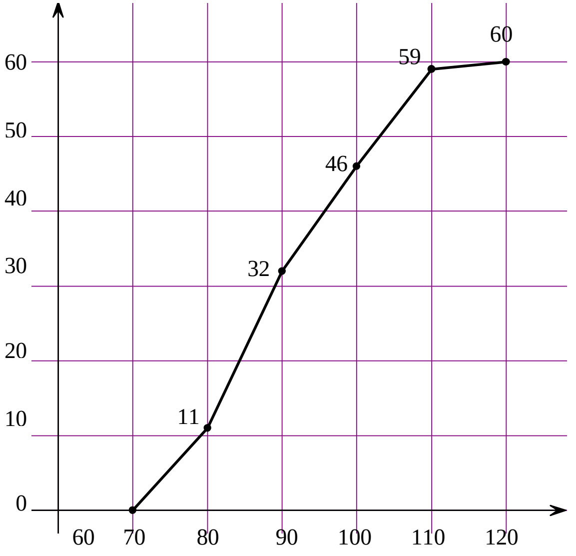
58,7 % (un seul résultat sans égalité, arrondi au dixième)

Remarques :

- Cette question était comptée sur 0 point.
- Le pourcentage est conforme à la propriété du cours puisque ce pourcentage est supérieur ou égal à 50 %.

VI.

Le taux de calcium dans le sang doit être compris entre 95 $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ et 105 $\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$. L'hypocalcémie est la diminution du taux de calcium dans le sang. Elle entraîne des troubles neurologiques et musculaires (fourmillements, contractures, etc.). Un patient atteint d'hypocalcémie doit faire des analyses tous les jours pendant 2 mois c'est-à-dire 60 jours consécutifs. Les résultats ont été regroupés en classes et le graphique ci-dessous est le polygone des effectifs cumulés croissants de la série. Les effectifs représentent des nombres de jours.



Déterminer graphiquement la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série statistique.
On laissera les traits de construction apparents sur le graphique. Penser à l'unité.

$\mathrm{Me} \approx 88\ \mathrm{mg \cdot L^{-1}}$ $\mathrm{Q_1} \approx 82\ \mathrm{mg \cdot L^{-1}}$ $\mathrm{Q_3} \approx 99\ \mathrm{mg \cdot L^{-1}}$

Remarques :

● Quelques élèves n'ont pas bien compris le principe (construction fausse).

● Les résultats donnés sans construction graphique n'étaient pas pris en compte.

● Si la série était donnée de manière discrète (et non de manière continue c'est-à-dire regroupée en classes), alors la on a aurait $\mathrm{Med} = \dfrac{30^{\mathrm{e}}\ \text{valeur} + 31^{\mathrm{e}}\ \text{valeur}}{2}$, $\mathrm{Q_1} = 32^{\mathrm{e}}$ valeur et $\mathrm{Q_3} = 95^{\mathrm{e}}$ valeur. Cette remarque ne peut cependant pas être exploitée ici.

VII.

1°) Un laboratoire pharmaceutique teste une nouvelle forme de comprimé d'aspirine. Il relève la masse des 1500 premiers comprimés fabriqués. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

Masse (en mg)	$[496\,;498[$	$[498\,;500[$	$[500\,;502[$	$[502\,;504[$	$[504\,;506[$
Effectif	15	800	640	35	10

Calculer, en mg, la masse moyenne d'un comprimé. Arrondir la valeur à l'unité.

500 mg (un seul résultat sans égalité)

Calculer, en mg, l'écart-type de la série. Arrondir la valeur à l'unité.

1 mg (un seul résultat sans égalité)

2°) Le laboratoire décide de produire 5 milliards de comprimés d'aspirine en 2015 et prévoit d'augmenter cette production de 7 % par an (le pourcentage s'applique chaque année sur le nombre de comprimés de l'année précédente).

a) Calculer le nombre total de comprimés produits durant les années 2015 à 2018.

22 199 715 000 (un seul résultat sans égalité)

5 milliards $= 5 \times 10^9$

Le problème est modélisé par une suite géométrique de raison $1{,}07$.

On calcule le nombre total en faisant la somme du nombre de comprimés produits en 2015, 2016, 2017, 2018.

On doit donc calculer la somme :
$5\times10^9 + 5\times10^9\times1{,}07 + 5\times10^9\times(1{,}07)^2 + 5\times10^9\times(1{,}07)^3 = 5\times10^9\times\left(1+1{,}07+1{,}07^2+1{,}07^3\right)$.

Remarques :

● Le résultat fourni par la calculatrice est bien la valeur exacte.

● Cette question a été ratée par tous les élèves. Ils n'ont pas vu qu'il faut calculer une somme.

● On peut vérifier le résultat avec la formule donnée dans la question b) pour $n = 3$.

b) On admet que le nombre total de comprimés produits jusqu'à l'année $2015+n$ incluse ($n \in \mathbb{N}$) est donné par $\dfrac{5\times10^{11}\left(1{,}07^{n+1}-1\right)}{7}$.
À l'aide de cette formule, calculer le nombre le nombre total de comprimés produits jusqu'à l'année 2025 incluse.
Arrondir le résultat à l'unité. Écrire le résultat sous forme « normale » et non sous forme scientifique.

78 917 996 593 (un seul résultat sans égalité)

On applique la formule donnée pour $n = 10$.
On calcule donc $\dfrac{5\times10^{11}\times\left(1{,}07^{11}-1\right)}{7}$. On obtient un résultat qui dépasse les capacités de la calculatrice.
Les premiers chiffres sont justes mais ils deviennent faux pour ceux de la fin.
Pour obtenir les autres chiffres (« chiffres cachés »), on applique la méthode habituelle par différence.
On calcule $\dfrac{5\times10^{11}\times\left(1{,}07^{11}-1\right)}{7} - 78\ 917\ 000\ 000$.

Avec une calculatrice scientifique en ligne, on obtient le résultat plus précis : 78917996592,8453… .

Le résultat 78 917 996 590 était accepté.