TS1 spécialité

Contrôle du jeudi 21 janvier 2016 (50 minutes)

Prénom : …………………… **Nom : ………………………………**

Note : …. / 20

Écrire très lisiblement, sans rature ; encadrer les résultats demandés en rouge à la règle.

I. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n! - 1$.

Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

On considère les égalités suivantes : $u_{n+1} = (n+1)u_n + n \quad (1)$ et $u_n = n \times (n-1)! - 1 \quad (2)$ [(1) valable pour tout entier naturel n ; (2) valable pour tout entier naturel $n \geqslant 1$].

1°) Démontrer brièvement l'égalité (1) [partir de u_{n+1}].

2°) En utilisant le lemme d'Euclide (et uniquement le lemme d'Euclide !) ainsi que les égalités (1) et (2), démontrer le résultat demandé. On attend une rédaction claire et concise sans faire aucun calcul.

II. (3 points : 1°) 1 point ; b) 1 point ; 2°) 1 point)

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a = 2n^2$, $b = 2n(n-1)$, $c = 2n^2 - 1$.

1°) a) En observant que $n - (n-1) = 1$, démontrer sans faire aucun calcul que n et $n-1$ sont premiers entre eux. On répondra par une phrase.

b) En déduire $\text{PGCD}(a\,;b)$.

2°) Calculer $(2n-1)c - (2n+1)b$. En déduire sans calcul $\text{PGCD}(b\,;c)$. On répondra en une phrase.

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère l'équation $217x+34y=2$ (E) d'inconnue $(x, y)\in\mathbb{Z}^2$.
Aucune justification n'est demandée dans cet exercice. On effectuera la recherche au brouillon.

1°) Donner un couple solution de (E).

Le couple $(\ldots\ldots\ldots\ldots ; \ldots\ldots\ldots\ldots)$ est un couple solution de (E).

Vérifier que ce couple est bien une solution particulière de (E) (on écrira une ligne de calcul).

……..

2°) Recopier sur les lignes ci-dessous et compléter la phrase suivante : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(\ldots\ldots\ldots\ldots ; \ldots\ldots\ldots\ldots)$ ………… ».

……..

……..

IV. (2 points)

Un fleuriste a 160 roses blanches, 112 roses rouges et 128 roses jaunes. Il veut préparer le plus grand nombre de bouquets ayant la même composition (même nombre de roses de chaque sorte).
Quelle composition doit-il choisir pour ses bouquets ?

Nombre de roses blanches	Nombre de roses rouges	Nombre de roses jaunes
…………	…………	…………

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 4 points)

Dans tout l'exercice, on considère un rectangle qui a pour longueur 1,26 m et pour largeur 0,9 m.
Répondre sans faire de phrase et sans justifier.

1°) Dans cette question, on veut le recouvrir entièrement par des carrés identiques les plus grands possibles, leur côté mesurant un nombre entier de centimètres.

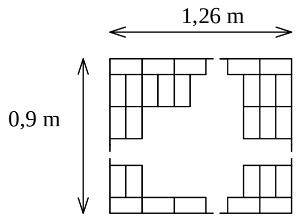
Quelle doit être la longueur des côtés de ces carrés (en centimètres) ?

………………

Combien faut-il utiliser de carrés ?

………………

2°) Dans cette question, on veut le recouvrir avec des rectangles tous identiques dont la longueur est égale au double de la largeur (la largeur étant mesurée par un nombre entier de centimètres) en respectant le schéma ci-dessous.
On veut que les rectangles aient les dimensions les plus grandes possibles.



Quelles sont les dimensions possibles de ces rectangles (en centimètres) ?

largeur : ……………… longueur : ………………

Combien en faut-il ?

………………

Corrigé du contrôle du 21-1-2016

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n!-1$.

Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

On considère les égalités suivantes : $u_{n+1} = (n+1)u_n + n \quad (1)$ et $u_n = n \times (n-1)!-1 \quad (2)$ [(1) valable pour tout entier naturel n ; (2) valable pour tout entier naturel $n \geqslant 1$].

1°) Démontrer brièvement l'égalité (1) [partir de u_{n+1}].

2°) En utilisant le lemme d'Euclide (et uniquement le lemme d'Euclide !) ainsi que les égalités (1) et (2), démontrer le résultat demandé. On attend une rédaction claire et concise sans faire aucun calcul.

1°)

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)!-1 \\ &= n! \times (n+1)-1 \\ &= (u_n+1)\times(n+1)-1 \\ &= (n+1)u_n + n+1-1 \\ &= (n+1)u_n + n \end{aligned}$$

2°) Les égalités (1) et (2) ne font intervenir que des entiers relatifs.

Le lemme d'Euclide appliqué à l'égalité (1) donne $\text{PGCD}(u_{n+1}\,;u_n) = \text{PGCD}(u_n\,;n)$.

Le lemme d'Euclide appliqué à l'égalité (2) donne $\text{PGCD}(u_n\,;n) = \text{PGCD}(n\,;-1)$.

Or $\text{PGCD}(n\,;-1) = 1$.

On en déduit que $\text{PGCD}(u_{n+1}\,;u_n) = 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

II.

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a = 2n^2$, $b = 2n(n-1)$, $c = 2n^2-1$.

1°) a) En observant que $n-(n-1)=1$, démontrer sans faire aucun calcul que n et $n-1$ sont premiers entre eux. On répondra par une phrase.

b) En déduire $\text{PGCD}(a\,;b)$.

2°) Calculer $(2n-1)c-(2n+1)b$. En déduire sans calcul $\text{PGCD}(b\,;c)$. On répondra en une phrase.

1°) a) $n-(n-1)=1$ s'écrit aussi $1\times n+(-1)\times(n-1)=1$.

D'après le théorème de Bezout, n et $n-1$ sont premiers entre eux.

b)

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(a\,;b) &= \text{PGCD}\big(2n^2\,;2n(n-1)\big) \\ &= 2n \times \text{PGCD}(n\,;n-1) \\ &= 2n\times 1 \\ &= 2n \end{aligned}$$

2°)

$$\begin{aligned} (2n-1)c-(2n+1)b &= (2n-1)(2n^2-1)-(2n+1)\times 2n(n-1) \\ &= 4n^3-2n-2n^2+1-(2n+1)\times(2n^2-2n) \\ &= 4n^3-2n-2n^2+1-(4n^3-4n^2+2n^2-2n) \\ &= 4n^3-2n-2n^2+1-(4n^3-2n^2-2n) \\ &= 4n^3-2n-2n^2+1-4n^3+2n^2+2n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Comme n est un entier relatif, $2n-1$ et $2n+1$ sont des entiers relatifs donc d'après le théorème de Bezout, b et c sont premiers entre eux. On en déduit que $\text{PGCD}(b\,;c)=1$.

III.

On considère l'équation $217x+34y=2$ (E) d'inconnue $(x,\,y)\in\mathbb{Z}^2$.

Aucune justification n'est demandée dans cet exercice. On effectuera la recherche au brouillon.

1°) Donner un couple solution de (E).

Le couple $(-26\,;166)$ est un couple solution de (E).

Le couple $(8\,;-51)$ est un couple solution de (E).

Vérifier que ce couple est bien une solution particulière de (E) (on écrira une ligne de calcul).

$217\times(-26)+34\times166 = -5642+5644 = 2$

$217\times8+34\times(-51) = 1736-1734 = 2$

Explications :

① Pour le couple $(-26\,;166)$:

Avec le programme « Bezout » de la calculatrice, on trouve $u=-13$ et $v=83$. Ce couple est tel que $217u+34v=1$.
On multiplie alors par 2 et on trouve le couple solution $(-26\,;166)$.

② Pour le couple $(8\,;-51)$:

1ère méthode : faite par un ou deux élèves dont Théo Spriet

On écrit l'algorithme d'Euclide pour 217 et 34 :

$217=34\times6+13$
$34=13\times2+8$
$13=8\times1+5$
$8=5\times1+3$
$5=3\times1+2$
$3=2\times1+1$
$2=2\times1+0$

Puis on remonte l'algorithme à partir de la ligne $5=3\times1+2$.

$2=5-3$
$2=5\times2-8$
$2=2\times13-3\times8$
$2=2\times13-3(34-13\times2)$
$2=8\times13-3\times34$
$2=8(217-34\times6)-3\times34$
$2=8\times217-51\times34$

On a donc le couple $(8\,;-51)$.

2e méthode : Capucine Le Baron

Pour trouver un couple de Bezout, j'isole le y de l'équation.
Je rentre alors l'expression dans $\boxed{f(x)}$.
Je regarde dans le tableau de valeurs à pas de 1 et je trouve la première valeur de x où y est un entier relatif.

Ici, on rentre alors : $\dfrac{2}{34}-\dfrac{217}{34}x$ dans la calculatrice et on trouve le couple $(8\,;-51)$.

2°) Recopier sur les lignes ci-dessous et compléter la phrase suivante : « Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme (...........;...........) ………… ».

1ère réponse :

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(34k-26\,;166-217k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2e réponse :

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(8-34k\,;217k-51)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Justification de la deuxième réponse :

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow 217x+34y=217\times8+34\times(-51)$$
$$\Leftrightarrow 217(8-x)=34(y+51)\ \ (\mathrm{E'})$$

D'après $(\mathrm{E'})$, $217 \mid 34(y+51)$.
Or 217 et 34 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, $217 \mid y+51$.
Ainsi il existe un entier relatif k tel que $y+51=217k$ donc $y=217k-51$.
On le remplace dans $(\mathrm{E'})$: $217(8-x)=34\times217k$.
En simplifiant par 217 les deux membres de cette égalité on obtient $x=8-34k$.
On fait une étape de vérification (indispensable).

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(34k+8\,;217k-51)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

IV.

Un fleuriste a 160 roses blanches, 112 roses rouges et 128 roses jaunes. Il veut préparer le plus grand nombre de bouquets ayant la même composition (même nombre de roses de chaque sorte).
Quelle composition doit-il choisir pour ses bouquets ?

Nombre de roses blanches	Nombre de roses rouges	Nombre de roses jaunes
10	7	8

On calcule $\mathrm{PGCD}(160\,;112\,;128)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{PGCD}(160\,;112\,;128)&=\mathrm{PGCD}(\mathrm{PGCD}(160\,;112)\,;128)\\&=\mathrm{PGCD}(16\,;128)\\&=16 \qquad \text{(car 16 divise 128)}\end{aligned}$$

V.

Dans tout l'exercice, on considère un rectangle qui a pour longueur 1,26 m et pour largeur 0,9 m.
Répondre sans faire de phrase et sans justifier.

1°) Dans cette question, on veut le recouvrir entièrement par des carrés identiques les plus grands possibles, leur côté mesurant un nombre entier de centimètres.

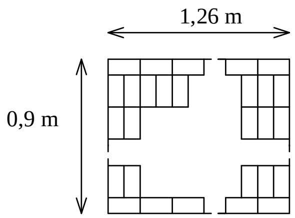
Quelle doit être la longueur des côtés de ces carrés (en centimètres) ?

18 cm

Combien faut-il utiliser de carrés ?

35

2°) Dans cette question, on veut le recouvrir avec des rectangles tous identiques dont la longueur est égale au double de la largeur (la largeur étant mesurée par un nombre entier de centimètres) en respectant le schéma ci-dessous.
On veut que les rectangles aient les dimensions les plus grandes possibles.



Quelles sont les dimensions possibles de ces rectangles (en centimètres) ?

largeur : 9 cm   longueur : 18 cm

Justification :

On note x la largeur en centimètres.

En réfléchissant un peu (et en faisant des schémas), on observe que $2x$ doit diviser 126 et 90.
Autrement dit $2x \mid 126$ et $2x \mid 90$ donc $x \mid 63$ et $x \mid 45$.
Or le PGCD de 63 et de 45 est égal à 9.
Donc pour avoir un rectangle de dimensions maximales, x doit être égal à 9.

Combien en faut-il ?

70

Combien en faut-il ?

608

Le plus simple est de calculer l'aire du grand rectangle : $114 \times 96 = 11340 \text{ cm}^2$ et l'aire de chaque petit rectangle : $9 \times 18 = 162 \text{ cm}^2$.

On calcule : $\dfrac{11340}{162} = 70$.