TS2 spécialité

Contrôle du mercredi 20 janvier 2016 (50 minutes)

Prénom : …………………… **Nom : ………………………………**

Note : …. / 20

Écrire très lisiblement, sans rature ; encadrer les résultats demandés en rouge à la règle.

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n!+1$.

Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

On considère les égalités suivantes : $u_{n+1} = (n+1)u_n - n \quad (1)$ et $u_n = n \times (n-1)!+1 \quad (2)$ [(1) valable pour tout entier naturel n ; (2) valable pour tout entier naturel $n \geqslant 1$] ?

1°) Démontrer brièvement l'égalité (1).

2°) En utilisant le lemme d'Euclide, démontrer le résultat demandé.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (4 points)

Démontrer que pour tout entier relatif n, $2n+1$ et $2n(n+1)$ sont premiers entre eux.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On considère l'équation $616x + 585y = 12 \quad (\mathrm{E})$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
Aucune justification n'est demandée.

1°) Donner sans justifier un couple solution de (E).

Le couple $(\ldots\ldots\ldots\ ; \ldots\ldots\ldots)$ est un couple solution de (E).

2°) Donner sans justifier tous les couples solutions de (E).

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme ……………………………………………………

……

……

- Il est demandé de ne pas écrire d'égalité d'ensembles.
- On rappelle qu'un couple se note avec des parenthèses.

IV. (2 points)

Un fleuriste a 135 roses blanches, 120 roses rouges et 90 roses jaunes. Il veut préparer le plus grand nombre de bouquets ayant la même composition (même nombre de roses de chaque sorte).
Quelle composition doit-il choisir pour ses bouquets ?

Nombre de roses blanches	Nombre de roses rouges	Nombre de roses jaunes
……………………	……………………	……………………

V. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Dans tout l'exercice, on considère un rectangle qui a pour longueur 1,14 m et pour largeur 0,96 m.
Répondre sans faire de phrase et sans justifier.

1°) Dans cette question, on veut le recouvrir entièrement par des carrés identiques les plus grands possibles, leur côté mesurant un nombre entier de centimètres.

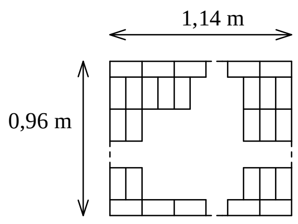
Quelle doit être la longueur des côtés de ces carrés ?

…………………………

Combien faut-il utiliser de carrés ?

…………………………

2°) Dans cette question, on veut le recouvrir avec des rectangles tous identiques dont la longueur est égale au double de la largeur (la largeur étant mesurée par un nombre entier de centimètres) en respectant le schéma ci-dessous.



Quelles sont les dimensions possibles de ces rectangles ?

…………………………

Combien en faut-il ?

…………………………

VI. (1 point)

Un entier relatif x est divisible par 3 et 5. Déterminer à l'aide d'une propriété un diviseur positif de x différent de 1, 3 et 5. Justifier par une phrase. Aucune réponse non justifiée ou mal justifiée ne sera prise en dérivation.

……

……

……

……

Conseil que j'aurais dû donner à l'oral :

Présenter chaque lettre utilisée.

Soit d un diviseur positif commun à …

Corrigé du contrôle du 20-1-2016

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n!+1$.

Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

On considère les égalités suivantes : $u_{n+1} = (n+1)u_n - n \quad (1)$ et $u_n = n \times (n-1)!+1 \quad (2)$ [(1) valable pour tout entier naturel n ; (2) valable pour tout entier naturel $n \geqslant 1$] ?

1°) Démontrer brièvement l'égalité (1).

2°) En utilisant le lemme d'Euclide, démontrer le résultat demandé.

1°)

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$$\begin{aligned}(n+1)u_n - n &= (n+1)(n!+1) - n \\ &= (n+1)n! + n + 1 - n \\ &= (n+1)!+1 \\ &= u_{n+1}\end{aligned}$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= (n+1)!+1 \\ &= n! \times (n+1) + 1 \\ &= (u_n - 1) \times (n+1) + 1 \\ &= (n+1)u_n - (n+1) + 1 \\ &= (n+1)u_n - n\end{aligned}$$

2°)

Le lemme d'Euclide appliqué à l'égalité (1) donne $\text{PGCD}(u_{n+1} ; u_n) = \text{PGCD}(u_n ; -n)$.

Le lemme d'Euclide appliqué à l'égalité (2) donne $\text{PGCD}(u_n ; n) = \text{PGCD}(n ; 1)$.

Or $\text{PGCD}(n ; 1) = 1$ et $\text{PGCD}(u_n ; -n) = \text{PGCD}(u_n ; n)$.

On en déduit que $\text{PGCD}(u_{n+1} ; u_n) = 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

II.

Démontrer que pour tout entier relatif n, $2n+1$ et $2n(n+1)$ sont premiers entre eux.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On écrit :

$$2n(n+1) = n(2n+1) + n \qquad (1)$$

$$2n+1 = 2 \times n + 1 \qquad (2)$$

On utilise ensuite le lemme d'Euclide.

Le lemme d'Euclide appliqué à l'égalité (1) donne $\text{PGCD}(2n(n+1) ; 2n+1) = \text{PGCD}(2n+1 ; n)$.

Le lemme d'Euclide appliqué à l'égalité (2) donne $\text{PGCD}(2n+1 ; n) = \text{PGCD}(n ; 1)$.

Or $\text{PGCD}(n ; 1) = 1$.

On en déduit que $\text{PGCD}(2n(n+1) ; 2n+1) = 1$.

Ainsi, on peut affirmer $2n+1$ et $2n(n+1)$ sont premiers entre eux.

2$^{\text{e}}$ méthode :

On écrit une égalité de Bezout.

On a : $(2n+1) \times (2n+1) - 2 \times 2n(n+1) = 1$.

Donc d'après le théorème de Bezout, $2n+1$ et $2n(n+1)$ sont premiers entre eux.

3$^{\text{e}}$ méthode :

Soit *d* un diviseur commun à $2n+1$ et $2n(n+1)$.

On travaille ensuite avec des combinaisons linéaires.

III.

On considère l'équation $616x + 585y = 12 \quad (\text{E})$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1°) Donner sans justifier un couple solution de (E).

Le couple $(1812 ; -1902)$ est un couple solution de (E).

2°) Donner sans justifier tous les couples solutions de (E).

Les couples solutions de (E) sont tous les couples de la forme $(1812 - 585k ; 616k - 1902)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

IV.

Un fleuriste a 135 roses blanches, 120 roses rouges et 90 roses jaunes. Il veut préparer le plus grand nombre de bouquets ayant la même composition (même nombre de roses de chaque sorte).
Quelle composition doit-il choisir pour ses bouquets ?

Nombre de roses blanches	Nombre de roses rouges	Nombre de roses jaunes
9	8	6

On calcule $\text{PGCD}(135\,;120\,;90)$.

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(135\,;120\,;90) &= \text{PGCD}\left(\text{PGCD}(135\,;120)\,;90\right)\\ &= \text{PGCD}(15\,;90)\\ &= 15 \quad \text{(car 15 divise 90)}\end{aligned}$$

V.

Dans tout l'exercice, on considère un rectangle qui a pour longueur 1,14 m et pour largeur 0,96 m.
Répondre sans faire de phrase et sans justifier.

1°) Dans cette question, on veut le recouvrir entièrement par des carrés identiques les plus grands possibles, leur côté mesurant un nombre entier de centimètres.

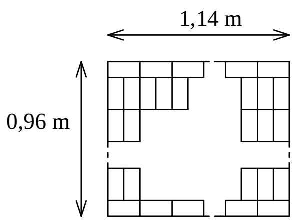
Quelle doit être la longueur des côtés de ces carrés ?

6 cm

Combien faut-il utiliser de carrés ?

304

2°) Dans cette question, on veut le recouvrir avec des rectangles tous identiques dont la longueur est égale au double de la largeur (la largeur étant mesurée par un nombre entier de centimètres) en respectant le schéma ci-dessous.



Quelles sont les dimensions possibles de ces rectangles ?

3 cm (largeur) et 6 cm (longueur)

Justification :

On note x la largeur en centimètres.

En réfléchissant un peu (et en faisant des schémas), on observe que $2x$ doit diviser 114 et 96.
Autrement dit $2x \mid 114$ et $2x \mid 96$ donc $x \mid 57$ et $x \mid 48$.
Or le PGCD de 57 et de 48 est égal à 3.
Donc pour avoir un rectangle de dimensions maximales, x doit être égal à 3.

Combien en faut-il ?

608

Le plus simple est de calculer l'aire du grand rectangle : $114 \times 96 = 10944 \text{ cm}^2$ et l'aire de chaque petit rectangle : $3 \times 6 = 18 \text{ cm}^2$.

On calcule : $\dfrac{10944}{18} = 608$.

VI.

Un entier relatif x est divisible par 3 et 5. Déterminer à l'aide d'une propriété un diviseur positif de x différent de 1, 3 et 5. Justifier par une phrase. Aucune réponse non justifiée ou mal justifiée ne sera prise en dérivation.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$3 \mid x$ et $5 \mid x$
Or 3 et 5 sont des nombres premiers entre eux.
Donc $3 \times 5 \mid x$ soit $15 \mid x$.

[Si un nombre est divisible par deux entiers premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.]

2$^{\text{e}}$ méthode :

x est un multiple de 3 et de 5 donc c'est un multiple de leur PPCM.

Or $\text{PPCM}(3\,;5) = 15$.

Donc x est un multiple de 15.

Autrement dit, x est divisible par 15.