1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 2 février 2016 (3 heures)

● Le barème est donné sur 40.

● Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé (et en particulier de ne rien écrire sur les figures).

I. (9 points)

Partie 1 (1°) 2 points ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - x^3}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$, on a $f'(x) = \dfrac{2x(1-x-x^2)}{(x+1)^2}$.

On ne demande d'écrire que trois lignes de calculs en montrant bien la formule utilisée.

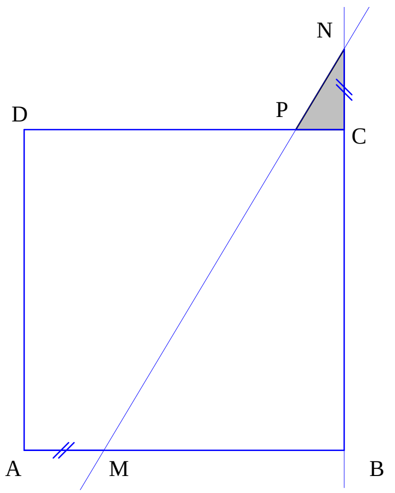
2°) Donner sans justifier les racines x_1 et x_2 du polynôme $1 - x - x^2$ en prenant $x_1 < x_2$.

Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ (ne pas oublier les 0 !) et les variations de *f*.

On admettra que $f(x_1) = \dfrac{-5\sqrt{5}-11}{2}$ et $f(x_2) = \dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}$.

Partie 2 (1°) a) 2 points + 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Une unité de longueur est fixée.
On considère un carré ABCD de côté 1. Soit M un point quelconque de [AB] et N le point de la demi-droite [BC) n'appartenant pas au segment [BC] tel que $\text{CN} = \text{AM}$. La droite (MN) coupe le segment [CD] en un point P.
L'objectif est de rendre maximale l'aire du triangle CNP.



1°) On pose $\text{AM} = x$.

Exprimer la distance PC puis l'aire du triangle CNP en fonction de *x*.

2°) En utilisant les résultats de la partie 1, déterminer pour quelle position de M l'aire du triangle CNP est maximale. On répondra en une ou deux phrases.

3°) **Question bonus (à traiter sur copie s'il reste du temps)**

On note α et β les valeurs de *x* telles que l'aire de CNP soit égale à 0,01 avec $\alpha < \beta$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs décimales approchées d'ordre 3 par défaut de α et β.

II. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 2 points ; c) 1 point)

À tout réel *m* non nul on fait correspondre la fonction $f_m : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2mx + 1}{mx - 1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{1}{m} \right\}$.

On note $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq \dfrac{1}{m}$, on a : $f_m'(x) = \dfrac{mx^2 - 2x + m}{(mx-1)^2}$.

On ne demande d'écrire que trois lignes de calculs en montrant bien la formule utilisée.

2°) Soit I le point de $\mathscr{C}_m$ d'abscisse 0.

Déterminer une équation de la tangente *T* à $\mathscr{C}_m$ en I. On répondra en 4 lignes au maximum en rédigeant avec concision.

3°) Dans cette question, on suppose que *m* est distinct de 0, 1 et – 1.
On cherche à démontrer qu'il existe un unique point J de $\mathscr{C}_m$, distinct de I, tel que la tangente en J soit parallèle à la droite *T*.

a) Recopier et compléter sans justifier la phrase : « Les abscisses des points de $\mathscr{C}_m$ en lesquels la tangente est parallèle à *T* sont les solutions de l'équation …. (écrire l'équation) ». On note (E) cette équation.

b) Déterminer les solutions de (E) sous la forme la plus simple possible et en déduire qu'il existe bien un unique point J de $\mathscr{C}_m$, distinct de I, tel que la tangente en J soit parallèle à la droite *T*. On donnera l'abscisse de J en fonction de *m*.
Rédiger en écrivant au début : « (E) est successivement équivalente à ... ».

c) Démontrer que J appartient à la parabole Γ d'équation $y = x^2 - 3$.

III. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

Dans une urne, on place *n* jetons (*n* entier naturel supérieur ou égal à 2) : un noir et tous les autres blancs.
On tire successivement, au hasard et avec remise, deux jetons de l'urne.
On considère le jeu dont la règle définie de la manière suivante :
- on gagne 16 points si on tire deux fois le jeton noir ;
- on gagne 1 point si on tire deux fois un jeton blanc ;
- on perd 5 points dans les autres cas.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. On notera que X peut prendre les valeurs $x_1 = 16$, $x_2 = 1$ et $x_3 = -5$.

Pour les questions 1°), 3°) et 4°), aucun détail des calculs n'est attendu sur la copie.
On donnera directement les résultats.

1°) Donner la loi de probabilité de X dans un tableau sans détailler les calculs.

2°) Démontrer que l'espérance mathématique de X est donnée par $E\left(\mathrm{X}\right)=\dfrac{n^2-12n+27}{n^2}$.

3°) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est équitable. Calculer dans ces cas la variance de X.

4°) Déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant 2$ tel que la probabilité d'avoir un gain positif ou nul soit supérieure ou égale à 0,9. Répondre sans justifier.

IV. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point)

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible circulaire. La cible est partagée en trois secteurs circulaires marqués 0 point (secteur A), 3 points (secteur B), 5 points (secteur C). Les probabilités d'atteindre les secteurs A, B, C sont respectivement égales à $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{6}$. On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
On définit les événements E : « le joueur gagne la partie en 2 lancers » ; F : « le joueur gagne la partie en 3 lancers » ; G : « le joueur perd la partie ». Aucun arbre de probabilités n'est demandé sur la copie.

1°) Démontrer que la probabilité de E est égale à $\dfrac{5}{36}$. Le détail des calculs est attendu.

2°) Calculer la probabilité des événements F et G. On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles sans détailler les calculs.

3°) Pour une partie, la mise est fixée à 2 €. Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien. On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique en euros du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc $x_1=-2$, $x_2=1$ et $x_3=3$.

a) Donner la loi de probabilité de X sans détailler la démarche.

b) Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Le trois questions de cet exercice sont indépendantes.
Aucune justification n'est demandée. On répondra directement sans faire de phrases.

On se place dans le plan orienté.

1°) Parmi les cinq réels suivants, quatre sont des mesures d'un même angle orienté. Quel est l'intrus ?

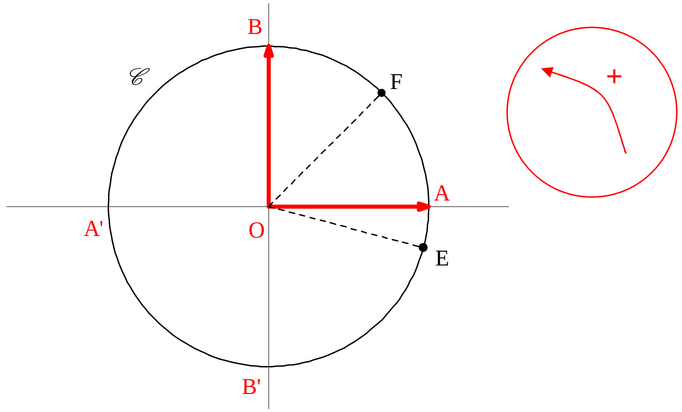
$\dfrac{9\pi}{4}$; $\dfrac{17\pi}{4}$; $-\dfrac{7\pi}{4}$; $\dfrac{13\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{4}$

2°) Donner la mesure en radians dans l'intervalle $\left[0\,;2\pi\right[$ d'un angle orienté dont une mesure en radians est $\dfrac{26\pi}{5}$.

3°) Donner la mesure principale en radians d'un angle orienté dont une mesure en radians est $\dfrac{218\pi}{3}$.

VI. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $\mathrm{A}\left(1\,;0\right)$, $\mathrm{B}\left(0\,;1\right)$, $\mathrm{A'}\left(-1\,;0\right)$, $\mathrm{B'}\left(0\,;-1\right)$. On note E et F les images respectives de $-\dfrac{\pi}{12}$ et de $\dfrac{\pi}{4}$ sur $\mathscr{C}$.



On note M et N les points de $\mathscr{C}$ tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)=x$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OF}}\,;\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)=-x$ où x est un réel fixé.

1°) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OF}}\right)$.
On veillera à présenter soigneusement les calculs.

2°) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)$ en fonction de x.
On veillera à présenter soigneusement les calculs.

3°) Déterminer pour quelles valeurs de x l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)$ admet $\dfrac{\pi}{2}$ pour mesure en radians.
Rédiger selon le modèle suivant à recopier et compléter :

$\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si …

si et seulement si …

si et seulement si …

Il est demandé :

- de rédiger de la manière la plus concise possible (inutile de recopier les questions) ;

- de soigner la présentation des calculs.

1$^{\text{ère}}$ S1

Nom : ……………………

Prénom : …………………

Contrôle du mardi 2 février 2016
Copie à rendre

I	II	III	IV	V	VI	Total/40	Total/20

I. (9 points)

Partie 1 (1°) 2 points ; 2°) 3 points)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Les racines du polynôme $1-x-x^2$ sont $x_1=$ ……………………… et $x_2=$ ……………………….

Partie 2 (1°) a) 2 points + 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) a) 1 point ; b) 2 points ; c) 1 point)

1°) ……

……

……

……

……

……

2°) ……

……

……

……

……

……

3°) a) ……………………………………………………………………………………………………

……

……

b) ……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

c) ……

……

III. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

1°)

x_i	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	

2°) ……

……

……

……

3°) Le jeu est équitable si et seulement si ……………………………………………………………

……

……

……

4°) …….. (répondre sans écrire d'égalité)

IV. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) ……

……

……

……

2°) ……

3°) a)

x_i	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	

b) $E(\mathrm{X}) =$ ………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) …………… (un seul résultat) ; 2°) …………… (un seul résultat) ; 3°) …………… (un seul résultat)

VI. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 2-2-2016

I.

1°)

f est une fonction rationnelle donc elle dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

On applique la formule de dérivation d'un quotient de deux fonctions dérivables.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\quad f'(x)=\frac{(2x-3x^2)\times(x+1)-(x^2-x^3)\times 1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-3x^3-3x^2-x^2+x^3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{-2x^3-2x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x(1-x-x^2)}{(x+1)^2}$$

2°) Les valeurs « charnières » sont 0, – 1, $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On doit ranger ces valeurs dans l'ordre croissant sur la première ligne du tableau.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		0		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		$+\infty$
SGN de $2x$		$-$		$-$	|	$-$	0^{num}	$+$		$+$	
SGN de $1-x-x^2$		$-$	0^{num}	$+$	|	$+$		$+$	0^{num}	$-$	
SGN de $(x+1)^2$		$+$		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0^{num}	$-$	||	$-$	0^{num}	$+$	0^{num}	$-$	
Variations de f		↗	$\frac{-5\sqrt{5}-11}{2}$	↘	||	↘	0	↗	$\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$	↘	

Les valeurs des extremums en $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sont données dans l'énoncé.

La valeur de $f(0)$ se calcule immédiatement avec l'expression de *f*.

On vérifie les variations à l'aide de la calculatrice à condition de choisir une bonne fenêtre graphique.

Partie 2

1°)

● Exprimons la distance PC en fonction de *x*.

Dans le triangle BMN, on sait que :
$\mathrm{P}\in(\mathrm{MN})$;
$\mathrm{C}\in(\mathrm{BN})$;
$(\mathrm{PC})//(\mathrm{BM})$

Donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NM}}=\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NB}}=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{MB}}$.

En particulier, on a : $\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{NB}}=\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{MB}}$. Par conséquent, $\frac{x}{x+1}=\frac{\mathrm{PC}}{1-x}$.

On obtient alors :

$$\mathrm{PC}=\frac{x(1-x)}{x+1}$$
$$=\frac{x-x^2}{x+1}$$

● Exprimons l'aire du triangle CNP en fonction de *x*.

$$\mathscr{A}_{\mathrm{CNP}}=\frac{\mathrm{CN}\times\mathrm{CP}}{2}$$
$$=\frac{x\times\frac{x-x^2}{x+1}}{2}$$
$$=\frac{x(x-x^2)}{2(x+1)}$$
$$=\frac{x^2-x^3}{2(x+1)}$$

2°)

On remarque que $\mathscr{A}_{\text{CNP}} = \dfrac{1}{2} f(x)$ (pour $x \in [0\,;1]$).
On s'intéresse donc à la restriction de la fonction f à l'intervalle [0 ; 1].
On a les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc obtient les variations de f sur $[0\,;1]$.

Comme $\dfrac{1}{2} > 0$, les variations de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{2} f(x)$ sont les mêmes que celles de f.

On observe que $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \in [0\,;1]$ (par exemple en utilisant la calculatrice).

D'après le tableau de variation établi à la partie 1, le maximum de f sur [0 ; 1] est égal $\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}$ et il est atteint en $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Donc le maximum de g sur [0 ; 1] est égal $\dfrac{5\sqrt{5}-11}{4}$ et il est atteint en $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

L'aire du triangle CPN est donc maximale lorsque $\text{AM} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; dans ce cas, elle vaut $\dfrac{5\sqrt{5}-11}{4}$.

3°) **Bonus :**

On effectue une résolution approchée de l'équation $\dfrac{x^2 - x^3}{2(x+1)} = 0{,}01$ à l'aide de la calculatrice.

On trace les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2 - x^3}{2(x+1)}$ et $x \mapsto 0{,}01$.

On règle la fenêtre graphique de manière à avoir une bonne visibilité.

On utilise ensuite la commande d'intersection pour déterminer une valeur approchée des abscisses des points d'intersection.

Il y a trois points d'intersection.

On lit les affichages suivants :

– 0,1247532	0,16747042	0,95728277

Donc

La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de α est 0,167.

La valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de β est 0,957.

II.

1°)

f est une fonction rationnelle donc elle dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{m}\right\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{m}\right\} \quad f_m'(x) = \frac{(2x-2m)(mx-1) - (x^2 - 2mx + 1) \times m}{(mx-1)^2}$$

$$= \frac{2mx^2 - 2x - 2m^2x + 2m - mx^2 + 2m^2x - m}{(mx-1)^2}$$

$$= \frac{mx^2 - 2x + m}{(mx-1)^2}$$

On pouvait poser $u(x) = x^2 - 2mx + 1$ et $v(x) = mx - 1$.
On avait alors $u'(x) = 2x - 2m$ et $v'(x) = m$.

2°)

Une équation de T s'écrit $y = f_m'(0)(x-0) + f_m(0)$.

On a : $f_m(0) = -1$ et $f_m'(0) = m$.

Par conséquent, T a pour équation $y = mx - 1$.

3°)

a)

Les abscisses des points de $\mathscr{C}_m$ en lesquels la tangente est parallèle à T sont les solutions de l'équation $f_m'(x) = m$ (E).

b) On résout (E) dans $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{m}\right\}$.

(E) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$$\frac{mx^2-2x+m}{(mx-1)^2}=m$$

$$mx^2-2x+m=m(mx-1)^2$$

$$mx^2-2x+m=m\left(m^2x^2-2mx+1\right)$$

$$mx^2-2x\cancel{+m}=m^3x^2-2m^2x\cancel{+m}$$

$$\left(m-m^3\right)x^2=2x\left(1-m^2\right)$$

$$\left(m-m^3\right)x^2-2x\left(1-m^2\right)=0$$

$$x\left[\left(m-m^3\right)x-2\left(1-m^2\right)\right]=0$$

$$x=0 \text{ ou } \left(m-m^3\right)x-2\left(1-m^2\right)=0$$

$$x=0 \text{ ou } x=\frac{2\left(1-m^2\right)}{m-m^3}$$

$$x=0 \text{ ou } x=\frac{2\left(1-m^2\right)}{m\left(1-m^2\right)}$$

$x=0$ ou $x=\dfrac{2}{m}$ (comme m est différent de 1 et de – 1, $1-m^2\neq 0$)

$\mathscr{C}_m$ admet donc une tangente parallèle à T au point J d'abscisse $\dfrac{2}{m}$.

c)

On commence par calculer l'ordonnée de J en fonction de m.

$$f_m\left(\frac{2}{m}\right)=\frac{\left(\frac{2}{m}\right)^2-2m\times\frac{2}{m}+1}{m\times\frac{2}{m}-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{m}\right)^2-4+1}{2-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{m}\right)^2-3}{2}$$

$$=\left(\frac{2}{m}\right)^2-3$$

On a donc $f_m\left(x_{\mathrm{J}}\right)={x_{\mathrm{J}}}^2-3$.

On en déduit que J appartient à la parabole Γ d'équation $y=x^2-3$.

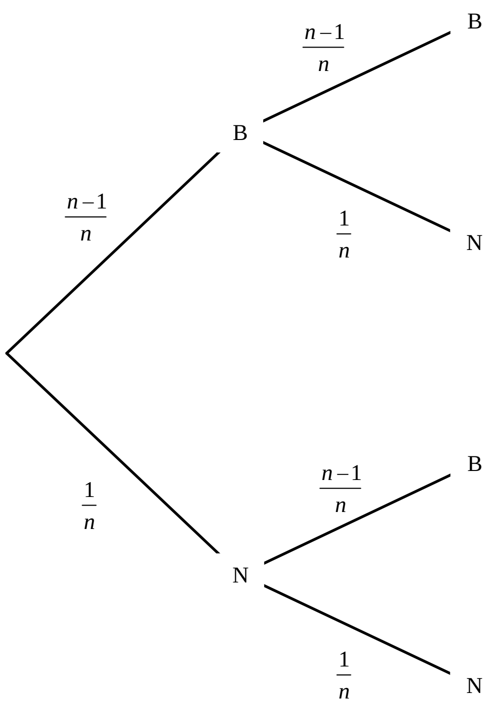
III.

Il s'agit de la répétition d'une épreuve dans des conditions identiques indépendantes.

On dresse un arbre de probabilités en utilisant les événements B et N définis ci-dessous.

B : « La boule tirée est blanche »

N : « La boule tirée est noire »



1°)

À chaque fois, on applique le principe multiplicatif (licite car les expériences sont indépendantes).

$$P(\mathrm{X}=16)=P(\text{N-N})$$

$$=P(\mathrm{N})^2$$

$$=\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^2}$$

$$P(\mathrm{X}=1)=P(\mathrm{B}-\mathrm{B})$$

$$=\left[P(\mathrm{B})\right]^2$$

$$=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$P(\mathrm{X}=-5)=P(\mathrm{B}-\mathrm{N})+P(\mathrm{N}-\mathrm{B})$$

$$=2P(\mathrm{B})\times P(\mathrm{N})$$

$$=2\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}$$

$$=\frac{2(n-1)}{n}$$

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

$$P(\mathrm{X}=16)+P(\mathrm{X}=1)+P(\mathrm{X}=-5)=1$$

x_i	16	1	-5
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{1}{n^2}$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$	$\frac{2(n-1)}{n^2}$

2°)

$$E(\mathrm{X})=16\times\frac{1}{n^2}+1\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2-5\times\frac{2(n-1)}{n^2}$$

$$=\frac{16+(n-1)^2-10(n-1)}{n^2}$$

$$=\frac{16+n^2-2n+1-10n+10}{n^2}$$

$$=\frac{n^2-12n+27}{n^2}$$

3°)

Le jeu est équitable si et seulement si $E(\mathrm{X})=0$

si et seulement si $\frac{n^2-12n+27}{n^2}=0$

si et seulement si $n^2-12n+27=0$

si et seulement si $n=3$ ou $n=9$

Pour $n=3$, la loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	16	1	-5
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{4}{9}$

$V(\mathrm{X})=16^2\times\dfrac{1}{9}+1^2\times\dfrac{4}{9}+(-5)^2\times\dfrac{4}{9}-0^2$

$=\dfrac{360}{9}$

$=40$

Pour $n=9$, la loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	16	1	-5
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\dfrac{1}{81}$	$\dfrac{64}{81}$	$\dfrac{16}{81}$

$V(\mathrm{X})=16^2\times\dfrac{1}{81}+1^2\times\dfrac{64}{81}+(-5)^2\times\dfrac{16}{81}-0^2$

$=\dfrac{720}{81}$

$=\dfrac{80}{81}$

On peut vérifier les calculs grâce à la commande statistiques de la calculatrice.

4°)

$P(\text{"avoir un gain positif ou nul"})=P(\mathrm{X}\geqslant 0)$

$=P(\mathrm{X}=1)+P(\mathrm{X}=16)$

$=\dfrac{(n-1)^2}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}$

$=\dfrac{(n-1)^2+1}{n^2}$

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $P(\text{"avoir un gain positif ou nul"})\geqslant 0,9$.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On rentre la fonction $f : x\mapsto\dfrac{(x-1)^2+1}{x^2}$ dans la calculatrice.
On lit dans le tableau de valeurs de f avec un pas de 1 que l'entier cherché est 19.

2$^{\text{e}}$ méthode :

On résout l'inéquation $\dfrac{(n-1)^2+1}{n^2}\geqslant 0,9\quad(1)$.

$(1)\Leftrightarrow (n-1)^2+1\geqslant 0,9n^2$

$\Leftrightarrow n^2-2n+2\geqslant 0,9n^2$

$\Leftrightarrow 0,1n^2-2n+2\geqslant 0$

On considère le polynôme $0,1x^2-2x+2$.
Son discriminant réduit est égal à 0,8.
Le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$.

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{0,8}}{0,1}\qquad x_2=\dfrac{1+\sqrt{0,8}}{0,1}$

Le polynôme est positif ou nul pour $x\leqslant x_1$ ou $x\geqslant x_2$.

Avec la calculatrice, on trouve $x_1=1,0557280...$ et $x_2=18,9442719...$

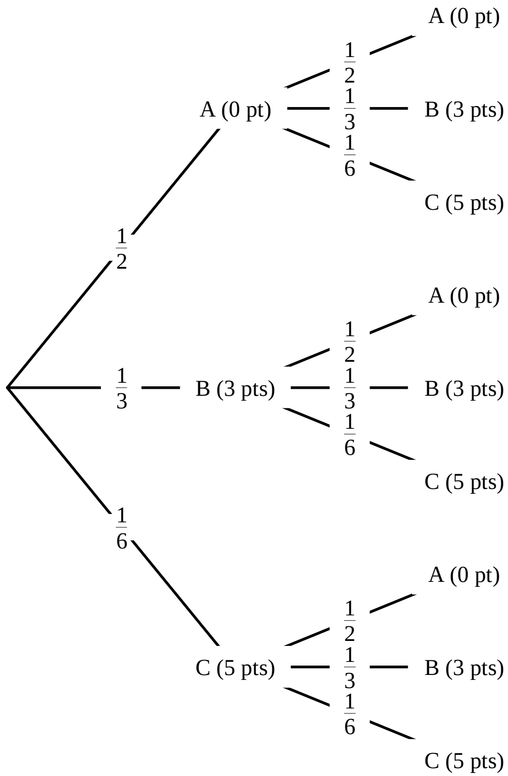
Donc l'entier cherché est 19.

IV.

On commence par faire un « gros » arbre de probabilités (à faire soigneusement au brouillon).

1°)

Dans l'arbre ci-dessous on n'a pas fait le 3$^{\text{e}}$ niveau qui est inutile pour répondre à la question.



Les chemins qui permettent de gagner en deux lancers sont : B-C ; C-B ; C-C.

En utilisant le principe multiplicatif sur l'arbre pour les branches qui aboutissent à un total de points supérieur ou égal à 8 on obtient :

$$P(\mathrm{E}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$$

$$= \frac{2+2+1}{36}$$

$$= \frac{5}{36}$$

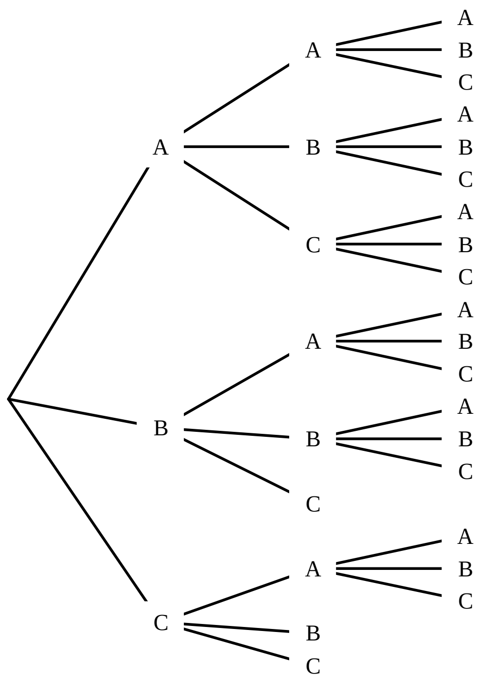
2°)

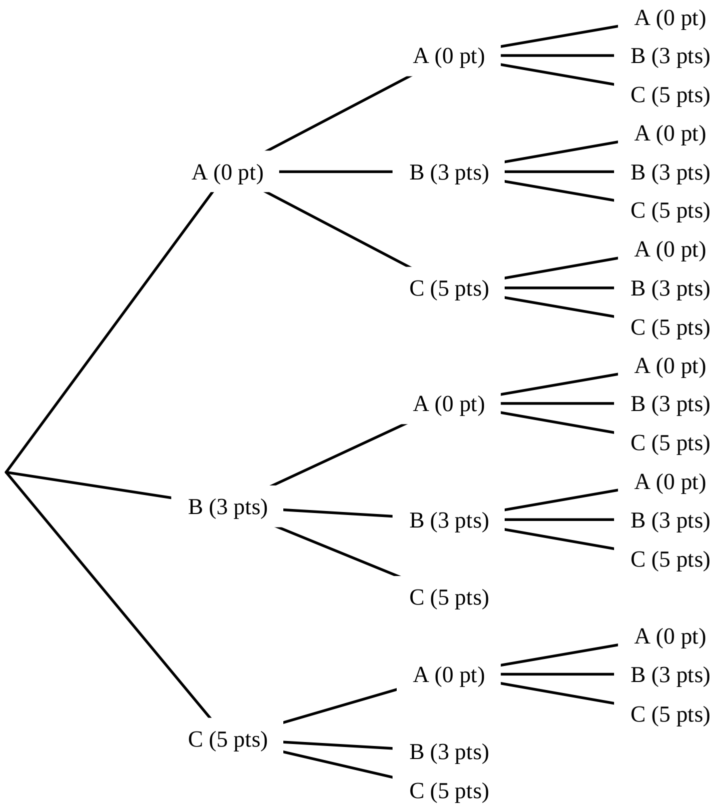
Si le total est supérieur est supérieur ou égal à 8, alors le joueur est déclaré gagnant.

Si au bout de deux lancers, le total est supérieur ou égal à 8, alors le joueur est déclaré gagnant et il n'y a pas de 3^{e} lancer.

● Pour calculer la probabilité de F, on doit utiliser l'arbre de probabilités.

Les chemins qui permettent de gagner en 3 lancers sont : A-B-C ; A-C-B ; A-C-C ; B-A-C ; B-B-B ; B-B-C ; C-A-B ; C-A-C.





$$P(\mathrm{F})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}+\frac{1}{36}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}$$

$$=\frac{4}{36}+\frac{2}{72}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}$$

$$=\frac{4}{36}+\frac{1}{36}+\frac{3}{54}$$

$$=\frac{5}{36}+\frac{1}{18}$$

$$=\frac{7}{36}$$

Pour calculer la probabilité de G, il y a deux méthodes :

1ère méthode :

L'événement G est le contraire de l'événement $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}$.

$$P(\mathrm{G})=1-P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})$$

$$=1-\left[P(\mathrm{E})+P(\mathrm{F})\right]\quad\text{(les événements E et F sont incompatibles)}$$

$$=1-\frac{7+5}{36}$$

$$=1-\frac{12}{36}$$

$$=\frac{24}{36}$$

$$=\frac{2\times12}{3\times12}$$

$$=\frac{2}{3}$$

2e méthode :

On utilise l'arbre de probabilités.

Les chemins qui correspondent à l'événement G sont :

A-A-A ; A-A-B ; A-A-C ; A-B-A ; A-B-B ; A-C-A ; B-A-A ; B-A-B ; B-B-A ; C-A-A

(la somme des probabilités des chemins A-A-A ; A-A-B ; A-A-C est égale à la probabilité du chemin A-A).

$$P(G)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{12}+\frac{3}{18}+\frac{2}{24}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

$$=\frac{3+1}{12}+\frac{2}{6}$$

$$=\frac{4}{12}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}$$

3°)

a)

x_i	-2	1	3
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$

b)

$$E(X)=-2\times\frac{2}{3}+1\times\frac{7}{36}+3\times\frac{5}{36}$$

$$=\frac{-48+7+15}{36}$$

$$=-\frac{26}{36}$$

$$=-\frac{13}{18}$$

$E(X)<0$ donc le jeu est défavorable au joueur.

V.

1°)

$$\frac{13\pi}{4}$$

Pour faire apparaître l'intrus, on peut écrire chaque nombre sous la forme d'un multiple entier de 2π et d'un nombre dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

$$\frac{9\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$\frac{17\pi}{4}=\frac{16\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=4\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$-\frac{7\pi}{4}=-\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=-2\pi+\frac{\pi}{4}$$
$$\frac{13\pi}{4}=\frac{16\pi-3\pi}{4}=4\pi-\frac{3\pi}{4}$$

2°)

La mesure en radians dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$ d'un angle orienté dont une mesure en radians est $\frac{26\pi}{5}$ est égale à $\frac{6\pi}{5}$.

En effet, on a : $\frac{26\pi}{5}=\frac{20\pi}{5}+\frac{6\pi}{5}=4\pi+\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{6\pi}{5}\in[0\,;2\pi[$.

3°) La mesure principale en radians d'un angle orienté dont une mesure en radians est $\frac{218\pi}{3}$ est égale à $\frac{2\pi}{3}$.

$$\frac{218\pi}{3}=\frac{2\pi+216\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+72\pi$$

VI.

1°)

$$\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OF}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OF}\right)-\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)$$ (relation de Chasles en forme soustractive)

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}$$
$$=\frac{\pi}{3}$$

On a $\frac{\pi}{3}$ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OF}\right)$.

2°)

$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OE}\right)+\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OF}\right)+\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{ON}\right)$ (relation de Chasles)

$=-\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OF}\right)+\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{ON}\right)$

$=-x+\dfrac{\pi}{3}-x$

$=\dfrac{\pi}{3}-2x$

3°)

$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si $\dfrac{\pi}{3}-2x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

si et seulement si $-2x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

si et seulement si $x=-\dfrac{\pi}{12}-k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

si et seulement si $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$